Determine si las siguientes premisas y su conclusión son válidas o no válidas.

```
Si usted es disciplinado, tendrá reconocimiento
Si usted tiene reconocimiento, será feliz
-----------------------------------------------
Si usted es disciplinado, será feliz

Si no tuviera carro estaría ahorrando dinero
Estoy ahorrando dinero
--------------------------------------------
No tengo carro
```

3.4. Reglas de Inferencia

Según la Real Academia Española se define inferencia como sacar una consecuencia o deducir algo de otra cosa. La inferencia consiste en partir de un conjunto de proposiciones o afirmaciones conocidas llamadas premisas y concluir de ellas otra proposición o afirmación que es llamada conclusión. Debe existir una relación entre ambas, la conclusión debe estar contenida de acuerdo a las premisas.

Existen diferentes mecanismos de inferencia tales como las tablas de verdad, el procedimiento de resolución y las reglas de inferencia. En un cálculo lógico, las reglas de inferencia o reglas de transformación son aquellos esquemas formales que nos permiten derivar unas fórmulas bien formadas (conclusiones) a partir de otras (premisas) [12].

El esquema que se utilizará para aplicar las reglas de inferencia será escribiendo cada premisa en una línea (columna numerada), a continuación se aplican las reglas de inferencia indicando cuál de ellas se utilizó hasta llegar a la conclusión. Los tres elementos fundamentales que permiten realizar las inferencias son:

- Premisas: hipótesis que se plantean, supuestos básicos, proposiciones, fórmulas, enunciados. Todas las anteriores cuando se plantean siempre se consideran como verdaderas.
- Conclusión: proposición que se desea probar a partir de las premisas.
- Reglas de Inferencia: conjuntos de pasos que se utilizar para obtener otras conclusiones de acuerdo a las premisas.

A continuación se explicarán las reglas de inferencia con más frecuencia de uso en la lógica.

3.4.1. Regla del Modus Ponens (M.P)

Es una regla también conocida como método de afirmación (afirmando-afirmo). Esta regla establece que dado un condicional y el antecedente del condicional, podemos concluir el consecuente del mismo condicional.

Es la más usada en solución de problemas, por tener un valor predictivo y de descubrimiento: si sabemos que $p \rightarrow q$ es verdadera (teorema conocido) y descubrimos que se cumple p (por ejemplo, a partir de los datos), podemos concluir q [13].

[12] http://www.mitecnologico.com/Main/ReglasDeInferenci a
[13] http://www.matetam.com/glosario/definicion/modus-ponens

Según el esquema planteado en la sección anterior para aplicar reglas de inferencia, se tiene como primera premisa `p → q` y como segunda premisa p, entonces se pueda aplicar la regla M.P y se obtiene q.

$$\begin{array}{llll} 1. & p \rightarrow q & & P \\ 2. & p & & P \\ \hline C & q & & MP_{1.2} \end{array}$$

El esquema anterior, se puede aplicar a proposiciones expresadas en lenguaje natural, por ejemplo si se tiene la premisa: `Si 10 es un número par, entonces es divisible por 2`, se puede aplicar Modus Ponens de la siguiente manera:

$$\begin{array}{lll} 1. & Si\ 10\ es\ un\ número\ par,\ entonces\ es\ divisible\ por\ 2 & P \\ 2. & 10\ es\ un\ número\ par & P \\ \hline C & 10\ es\ divisible\ por\ 2 & MP_{1.2} \end{array}$$

El uso de las reglas de inferencia no se debe restringir a proposiciones atómicas, también se pueden aplicar a proposiciones propuesta, a continuación se muestra un caso.

$$\begin{array}{lll} 1. & Si\ estudio\ y\ no\ gano\ las\ materias,\ entonces\ me\ desmotivo\ y\ me\ retiro & P \\ 2. & Es\ el\ caso\ que\ estudio\ y\ no\ gano\ las\ materias & P \\ \hline C & Por\ lo\ tanto, me\ desmotivo\ y\ me\ retiro & MP_{1.2} \end{array}$$

Formalizando el caso anterior, su representación queda de la siguiente manera:

```
p: estudio
q: gano las materias
r: me desmotivo
s: me retiro
```

$$\begin{array}{llll} 1. & (p \land \neg q) \rightarrow (r \land s) & & P \\ 2. & (p \land \neg q) & & P \\ \hline C & (r \land s) & & MP_{1.2} \end{array}$$

Como se puede observar es posible añadir `(r ^ s)` como otro enunciado verdadero que forme parte de dicho argumento.

El Modus Ponens también es posible aplicarlo a una lista de premisas. Por ejemplo se quiere demostrar `(m v n)`, a partir de las premisas 1,2 y 3. De acuerdo a la estructura del Modus Ponens, es posible aplicar la regla entre las premisas 2 y 3, esto genera una conclusión que se adiciona a la lista con el número 4. Con esta conclusión es posible aplicar la regla entre esta y la premisa 1. Se puede entonces demostrar `(m v n)` a partir de las premisas dadas.

$$\begin{array}{llll} 1. & \neg h & \rightarrow (m \lor n) & P \\ 2. & (q \lor p) & \rightarrow \neg h & P \\ 3. & (q \lor p) & & P \\ C_1 4. & \neg h & & MP_{2.3} \\ \hline C & (m \lor n) & & MP_{1.4} \end{array}$$

Cuando se aplica la regla de Modus Ponens, para llegar a una conclusión el orden de las proposiciones es indiferente.

ACTIVIDAD

- Dada la siguiente premisa aplique Modus Ponens para obtener la conclusión

$$\begin{array}{ll} 1.\ Si\ Jose\ esta\ en\ su\ oficina\ trabajando, entonces\ Jose\ está\ en\ la\ Universidad & P \\ 2.\ Jose\ está\ en\ su\ oficina\ trabajando & P \\ \hline C & MP_{1.2} \end{array}$$

- De acuerdo a la siguiente expresión, formalícelas en lógica proposicional y aplique Modus Ponens.

  `Si existiera justicia social en Sudamérica, entonces no habrían niños trabajando en la calle. Es el caso que existe justicia social en Sudamérica.`

- Dada la siguiente lista de premisas, demostrar `h` si:

$$\begin{array}{lcccc} 1. & p & \to & q & P \\ 2. & q & \to & h & P \\ 3. & q & & & P \\ \hline \end{array}$$

- Dada la siguiente lista de premisas, demostrar `¬¬h` si:

$$\begin{array}{lcccc} 1. & p & \to & \neg q & P \\ 2. & \neg q & \to & \neg\neg h & P \\ 3. & p & & & P \\ \hline \end{array}$$

3.4.2.Regla del Doble Negación (D.N)

Es una regla que establece que la doble negación de una proposición equivale a la misma proposición y viceversa. Permite el paso de una sola premisa a la conclusión.

Así esta regla tiene dos formas simbólicas, en el primer caso la conclusión deriva de la negación de su negación.

$$\begin{array}{lcc} 1. & q & P \\ \hline C & \neg\neg q & DN_1 \end{array}$$

Un ejemplo de la aplicación de este caso es el siguiente:

$$\frac{1.\ \ Andrés\ toma\ el\ avión\ para\ llegar\ a\ Bogotá \qquad P}{C\ \ No\ sucede\ que\ Andrés\ no\ toma\ el\ avión\ para\ llegar\ a\ Bogotá \qquad DN_1}$$

En el segundo caso, la proposición que esta negada doblemente, es una proposición afirmativa. Es posible entonces eliminar ambas negaciones.

$$\frac{1.\ \ \neg\neg\, q \qquad P}{C \qquad q \qquad DN_1}$$

Un ejemplo de la aplicación de este caso es el siguiente:

$$\frac{1.\ \ No\ es\ cierto\ que\ 3\ no\ es\ un\ numero\ impar \qquad P}{C\ \ 3\ es\ un\ numero\ impar \qquad DN_1}$$

En este punto es posible aplicar las reglas vistas para obtener una conclusión. Por ejemplo si se pide demostrar ¬¬h, a partir de las siguientes premisas:

$$\begin{array}{llcll}
1. & q & \rightarrow & h & P \\
2. & q & & & P \\
C_1 3. & h & & & MP_{1.2} \\
\hline
C & \neg\neg h & & & DN_3
\end{array}$$

En este ejemplo se observa que a las premisas 1 y 2, se les aplica Modus Ponens, y se obtiene la conclusión h, a la cual se puede aplicar la doble negación obteniendo ¬¬h.

ACTIVIDAD

Aplique doble negación a las siguientes proposiciones:

- Juan estudia Ingeniería de Sistemas y Computación para construir empresa.
- No ocurre que Juliana no es una buena profesional.

Aplique las reglas de inferencia a las siguientes premisas, para demostrar ¬¬h.

$$\begin{array}{llcll}
1. & h & \rightarrow & \neg q & P \\
2. & \neg q & \rightarrow & h & P \\
3. & h & & & P
\end{array}$$

3.4.3.Regla del Tollendo Tollens (T.T)

Es una regla que se aplica a las expresiones condicionales, y la cual es conocida como (negando-niego. Esta regla determina que dado un condicional y la negación de su consecuente, es posible concluir la negación del antecedente.

Si de un condicional, aparece como premisa el consecuente negado (el efecto), eso nos conduce a negar el antecedente (la causa), puesto que si un efecto no se da, su causa no ha podido darse[14].

En la regla del Tollendo Tollens, se tiene como primera premisa $p \rightarrow q$ y como segunda premisa $\neg q$, entonces se pueda aplicar la regla TT y se obtiene $\neg p$.

$$\begin{array}{llr} 1. & p \rightarrow q & P \\ 2. & \neg q & P \\ \hline C & \neg p & TT_{1.2} \end{array}$$

Por ejemplo si se tiene la premisa: `Si x es un número par, entonces es divisible por 2,` se puede aplicar Tollendo Tollens de la siguiente manera:

$$\begin{array}{llr} 1. & Si\ x\ es\ un\ numero\ par\ entonces\ es\ divisible\ por\ 2 & P \\ 2. & x\ no\ es\ divisible\ por\ 2 & P \\ \hline C. & x\ no\ es\ un\ numero\ par & TT_{1.2} \end{array}$$

Si se tienen la premisa: "`Si el invierno se prolonga, entonces los ríos se salen del cauce`", y la formalizamos, se puede aplicar Tollendo Tollens de la siguiente manera:

```
p: el invierno se prolonga
q: los ríos se salen del cauce
```

$$\begin{array}{llr} 1. & Si\ el\ invierno\ se\ prolonga, entonces\ el\ río\ se\ sale\ del\ cauce & P \\ 2. & El\ río\ no\ se\ sale\ del\ cauce & P \\ \hline C. & Luego, el\ invierno\ no\ se\ prolonga & TT_{1.2} \end{array}$$

Esto nos permite fórmular una regla combinada de las ambas anteriores, consecuencia ambas de una misma propiedad de la implicación; la regla Modus Ponens sólo nos permite afirmar si está afirmado el antecedente (el primer término de la implicación), y la regla Tollendo Tollens sólo nos permite negar a partir del consecuente (segundo término de la implicación); ambas consecuencias se derivan de que la implicación es una flecha que apunta en un único sentido, lo que hace que sólo se pueda afirmar a partir del antecedente y negar sólo a partir del consecuente[15].

El Tollendo Tollens se puede usar en una lista de premisas. Si se quiere demostrar $x \neq 0$, a partir de las premisas 1,2,3 y 4, es posible aplicar Modus Ponens entre (1,4) lo que nos genera la conclusión de la línea 5 $(x = w)$, en ese caso es posible aplicar Modus Ponens entre las líneas (2,5), lo que genera la conclusión $(x = 1)$. Finalmente se puede aplicar Tollendo Tollens entre las líneas (3,6), obteniendo la conclusión $(x = 0)$.

---

[14] http://www.juntadeandalucia.es/averroes/emilioprados/filosof/Logica/Reglas%20de%20inferencia.htm, Carlos Escaño Fryganas, Reglas de Inferencia.
[15] http://www.juntadeandalucia.es/averroes/emilioprados/filosof/Logica/Reglas%20de%20inferencia.htm Carlos Escaño Fryganas, Reglas de Inferencia.

1.	$x = y$	$\rightarrow$	$x = w$	P
2.	$x = w$	$\rightarrow$	$x = 1$	P
3.	$x = 0$	$\rightarrow$	$x \neq 1$	P
4.	$x = y$			P
$C_1$5.	$x = w$			$MP_{1.4}$
$C_2$6.	$x = 1$			$MP_{2.5}$
C	$x \neq 0$			$TT_{3.6}$

En las siguientes secciones del libro, para algunos ejemplos, se utilizarán de forma combinada las reglas de inferencia que se vayan incorporando.

ACTIVIDAD

De acuerdo a la siguiente expresión, formalícelas en lógica proposicional y aplique Tollendo Tollens.

- `Si no tiene dinero en efectivo, entonces no puede comprar el artículo.`
- `Si duerme en exceso, no tendrá tiempo para trabajar.`

Aplique las reglas de inferencia a las siguientes premisas, para demostrar `h`.

1.	q	$\rightarrow$	p	P
2.	$\neg q$	$\rightarrow$	$\neg\neg h$	P
3.	$\neg p$			P

3.4.4.Regla del Adjunción (A)

Esta regla establece que dadas dos premisas verdaderas, su conjunción es también verdadera. El orden de las premisas es indiferente.

1.	p	P
2.	q	P
C	$p \land q$	$A_{1.2}$

Para esta regla el orden de las premisas es indiferente, por lo que también se puede representar de la siguiente manera.

1.	p	P
2.	q	P
C	$q \land p$	$A_{1.2}$

Por ejemplo si se tiene la primera premisa: `Liliana es ingeniera` y la segunda premisa: `Mario es odontólogo`, se pueden unir mediante el operador ^ y se tendría una nueva proposición que también es verdadera, quedando: `Liliana es ingeniera y Mario es odontólogo.`

Esta regla permite pasar directamente de las premisas a la conclusión. A continuación se muestra otro ejemplo con la estructura planteada.

$$\begin{array}{lr} 1.\ \ Un\ triangulo\ tiene\ tres\ lados & P \\ 2.\ \ La\ suma\ de\ los\ angulos\ interiores\ es\ 180° & P \\ \hline C\ \ Un\ triangulo\ tiene\ tres\ lados\ y\ la\ suma\ de\ los\ angulos\ interiores\ es\ 180° & A_{1.2} \end{array}$$

La regla de Adjuncion también se puede aplicar a una lista de premisas. Por ejemplo si se desea demostrar `(r ^ t)^ (t ^ w)`, teniendo las premisas de las líneas 1,2 y 3, es posible aplicar esta regla de la siguiente manera.

$$\begin{array}{lr} 1.\quad r & P \\ 2.\quad t & P \\ 3.\quad w & P \\ C_1 4.\ \ (r \land t) & A_{1.2} \\ C_2 5.\ \ (t \land w) & A_{2.3} \\ \hline C\ \ (r \land t) \land (t \land w) & A_{4.5} \end{array}$$

ACTIVIDAD

- Dadas las siguientes premisas, aplicar entre ellas la regla de adjuncion.
    - Julian es futbolista
    - Los aficionados se divierte cerca del coliseo
    - Las boletas para el espectáculo se encuentran agotadas.
- Demostrar `¬¬(¬h^(p^q))` si se tienen las siguientes premisas, se debe indicar el nombre de la regla aplicada.

$$\begin{array}{lr} 1.\quad \neg h & P \\ 2\quad p \land q & P \\ & \\ \hline \end{array}$$

3.4.5.Regla I Simplificación (I.S)

Esta regla establece que de la conjunción de dos proposiciones podemos concluir cualquiera de ellas. Si la premisa es cierta, cada una de las conclusiones es también cierta.

$$\begin{array}{lr} 1.\quad p \land q & P \\ \hline C\quad p & S_1 \end{array}$$

ó

$$\begin{array}{lr} 1.\quad p \land q & P \\ \hline C\quad q & S_1 \end{array}$$

Por ejemplo si se tiene la premisa: `El lugar de nacimiento de Manuel es Cali y el mío es Armenia`. De esta premisa se pueden sacar dos conclusiones, la primera: `El lugar de nacimiento de Manuel es Cali` y la segunda: `Mí lugar de nacimiento es Armenia.`

A continuación se muestra otro ejemplo con la estructura planteada.

$$\begin{array}{ll} 1.\ \ Un\ numero\ que\ termine\ en\ cero\ es\ divisible\ por\ cinco\ y\ por\ diez & P \\ \hline C\ \ Un\ numero\ que\ termine\ en\ cero\ es\ divisible\ por\ cinco & S_1 \end{array}$$

ó

$$\begin{array}{ll} 1.\ \ Un\ numero\ que\ termine\ en\ cero\ es\ divisible\ por\ cinco\ \ y\ por\ diez & P \\ \hline C\ \ Un\ numero\ que\ termine\ en\ cero\ es\ divisible\ por\ diez & S_1 \end{array}$$

ACTIVIDAD

- Demostrar `q` si se tienen las siguientes premisas, se debe indicar el nombre de la regla aplicada, las cuales pueden ser para este caso: TollendoTollens, Ponendo Ponens, simplificacion y doble negación.

$$\begin{array}{lll} 1. & \neg s \ \rightarrow \ [(\neg s\ V\ \neg q) \Lambda\ (s\ \Lambda\ \neg\neg q)] & P \\ 2. & \neg(p\ \Lambda\ h) & P \\ 3. & s \ \rightarrow \ (p\ \Lambda\ h) & P \\ & & \\ \hline C & & \end{array}$$

- Demostrar `¬¬(p^ q) q` si se tienen las siguientes premisas, se debe indicar el nombre de la regla aplicada, las cuales pueden ser para estos casos: Simplificacion y doble negación.

$$\begin{array}{lll} 1. & \neg\ [(p\ \Lambda\ q)\ \Lambda\ h] \ \rightarrow \ (p\ \Lambda\ h) & P \\ 2. & \neg(p\ V\ h) & P \\ & & \\ \hline C. & & \end{array}$$

3.4.6.Regla de Tollendo Ponens (T.P)

Esta regla establece que la negación de una de las proposiciones que establece una disyunción, afirma otra proposición, es decir, negando una proposición en una disyunción, se afirma la otra disyunción. También conocida como la regla (negando-afirmo).

Si uno de los miembros de una disyunción es negado, el otro miembro queda automáticamente afirmado, ya que uno de los términos de la elección ha sido descartado[16].

1.	$p \, V \, q$	P
2.	$\neg p$	P
C	q	$TP_{1.2}$

O también se puede concluir

1.	$p \, V \, q$	P
2.	$\neg q$	P
C	p	$TP_{1.2}$

Por ejemplo si se tiene la primera premisa: `He viajado a España o he viajado a Colombia` y la segunda premisa: `No he viajado a Colombia`, se tiene la conclusión: `por lo tanto, he viajado a España.`

A continuación se muestra otro ejemplo con la estructura planteada.

1.	4 *es un numero compuesto o* 25 *es multiplo de* 3	P
2.	25 *no es multiplo de* 3	P
C	4 *es un numero compuesto*	$TP_{1.2}$

ACTIVIDAD

- Dadas las siguientes premisas, aplicar entre ellas la regla de adjuncion.
    - `La persona ha hecho el proyecto o ha pagado por el.`
    - `La persona no ha pagado el proyecto`

- Demostrar `z<8 q` si se tienen las siguientes premisas, se debe indicar el nombre de la regla aplicada, las cuales pueden ser para estos casos: Tollendo ponens, Tollendo Tollens, Adjunción y Modus Ponens.

1.	$(z < w) \, V \, (z = w)$	P
2.	$(z = w) \; \rightarrow \; (w \neq 8)$	P
3.	$[(z < w) \, \Lambda \, (w = 8)] \; \rightarrow \; z < 8$	P
4.	$w = 8$	P
C		

[16] http://razonamiento-logico.blogspot.com/ . Lógica proposicional, Reglas de inferencia.

3.4.7. Regla II Simplificación (II.S)

Esta regla establece que si una proposición es verdadera, la disyunción de esta premisa con otra cualquiera es siempre verdadera. Esto viene dado desde la definición misma del conectivo de disyunción en donde es suficiente que una de las proposiciones sea verdadera para que la fórmula sea verdadera.

$$\begin{array}{lll} 1. & p & P \\ \hline C & p \vee q & II.S_1 \end{array}$$

O también se puede concluir

$$\begin{array}{lll} 1. & q & P \\ \hline C & p \vee q & II.S_1 \end{array}$$

A continuación se muestra otro ejemplo con la estructura planteada.

$$\begin{array}{lll} 1. & 4\ es\ un\ numero\ compuesto & P \\ \hline C & 4\ es\ un\ número\ compuesto\ \ ó\ 25\ es\ divisible\ por\ 5 & II.S_1 \end{array}$$

O también se puede concluir

$$\begin{array}{lll} 1. & 25\ es\ divisible\ por\ 5 & P \\ \hline C & 25\ es\ divisible\ por\ 5\ ó\ 4\ es\ un\ número\ compuesto & II.S_1 \end{array}$$

Si se tienen fórmulas compuestas, también es posible aplicar la regla II de simplificación, como en el siguiente caso en el cual se tiene la proposición $(\neg p \vee q)$, la cual se asume como verdadera y la proposición $\neg p$, la cual se asume como falsa. La disyunción entre ambas da una conclusión verdadera.

$$\begin{array}{lll} 1. & \neg p \vee q & P \\ 2. & \neg p & P \\ \hline C & (\neg p \vee q) \vee \neg p & II.S_8 \end{array}$$

La regla II de simplificación también se puede usar en una lista de premisas. Si se quiere demostrar $q \vee s$, a partir de las premisas 1,2, y 3, se puede observar que se parte de tres premisas, en las cuales van deduciendo una serie de conclusiones y donde al final, se puede observar que a $\neg\neg q$ se le aplica la regla de la doble negación quedando solo q, para posteriormente aplicar la regla II de simplificación con la cual se sigue garantizando que la conclusión sigue siendo verdadera.

$$\begin{array}{lll} 1. & \neg s \ \rightarrow \ [(s \vee \neg\neg q) \wedge (s \wedge \neg q)] & P \\ 2. & \neg(p \wedge h) & P \\ 3. & s \ \rightarrow \ (p \wedge h) & P \\ C_1 4. & \neg s & TT_{2.3} \\ C_2 5. & (s \vee \neg\neg q) \wedge (s \wedge \neg q) & MP_{1.4} \\ C_3 6. & s \vee \neg\neg q & IS_5 \\ C_4 7. & \neg\neg q & TP_{4.6} \\ C_5 8. & q & DN_7 \\ \hline C & q \vee s & II.S_8 \end{array}$$

ACTIVIDAD

- Dadas las siguientes premisas, formalicelas y aplicaque entre ellas la regla II de simplificación de forma que la conclusión sea verdadera.
  - o Andrea cancela lenguaje de programacion o compiladores.
  - o Andrea no cancela lenguaje de programacion.
  - o Andrea no cancela compiladores

Aplique las reglas de inferencia a las siguientes premisas, para demostrar (s ^ q) v q.

$$
\begin{array}{lll}
1. & \neg s \rightarrow [(\neg s \lor q) \land (s \land q)] & P \\
2. & \neg(t \land r) & P \\
3. & s \rightarrow (t \land r) & P \\
 & & \\
\hline
C & &
\end{array}
$$

3.4.8. Regla Transitiva (T)

Esta regla establece que dados dos condicionales donde el consecuente de una proposición coincide con el antecedente de otra proposición, se obtiene una proposición condicional que tiene como antecedente el antecedente del primer condicional y como consecuente el consecuente del segundo condicional.

$$
\begin{array}{llll}
1. & p \rightarrow q & & P \\
2. & q \rightarrow h & & P \\
\hline
C. & p \rightarrow h & & T_{1.2}
\end{array}
$$

Por ejemplo si se tiene la premisa: `Si paso vacaciones en Santa Marta entonces me broncearé en el hotel; si me bronceo me pondré moreno; por lo tanto si paso vacaciones en Santa Marta me podré moreno.`

Formalizando el caso anterior, su representación queda de la siguiente manera:

```
p: Paso vacaciones en Santa Marta
q: Me broncearé en el hotel
r: Me pondré moreno
```

$$
\begin{array}{llll}
1. & p \rightarrow q & & P \\
2. & q \rightarrow r & & P \\
\hline
C. & p \rightarrow r & & T_{1.2}
\end{array}
$$

A continuación se muestra otro ejemplo con la estructura planteada.

$$\begin{array}{lr} 1.\ \ Si\ y\ es\ un\ mumero\ par\ entonces\ el\ cuadrado\ de\ y\ es\ numero\ par & P \\ 2.\ \ Si\ el\ cuadrado\ de\ y\ es\ un\ numero\ par\ entonces\ es\ divisible\ por\ 2 & P \\ \hline C\ \ \ Si\ y\ es\ un\ numero\ par\ entonces\ es\ divisible\ por\ 2 & TP_{1.2} \end{array}$$

Se observa que la proposición obtenida con el antecedente el antecedente del primer condicional y como consecuente el consecuente del segundo condicional. En este caso la conclusión es válida.

La regla Transitiva se puede usar en una lista de premisas. Si se quiere demostrar p → h, a partir de las premisas 1,2, y 3, es posible aplicar las siguientes reglas:

$$\begin{array}{llr} 1. & (q \rightarrow h)\ \Lambda\ p & P \\ 2. & p \rightarrow q & P \\ 3. & \neg h & P \\ C_1 4. & q \rightarrow h & IS_1 \\ \hline C & p \rightarrow h & T_{2.4} \end{array}$$

ACTIVIDAD

- Dadas las siguientes premisas, formalicelas y aplique entre ellas la regla transitiva de de forma tal que la conclusión sea verdadera.
    - Si gano todas las materias del semestre entonces me ganaré la beca; si me gano la beca me pondré feliz; por lo tanto si gano todas las materias del semestre me pondré feliz.
    - Si Juan no aprende ingles entonces no puede viajar; si Juan no puede viajar pierde los tiquetes que compró; por lo tanto si Juan no aprende ingles perderá los tiquetes que compró.
- Aplique las reglas de inferencia a las siguientes premisas, para demostrar ¬p.

$$\begin{array}{llr} 1. & (q \rightarrow h)\ \Lambda\ p & P \\ 2. & p \rightarrow q & P \\ 3. & \neg h & P \\ & & \\ \hline C & & \end{array}$$

3.4.9.Regla Conmutativa (C)

Esta regla establece que el cambio de orden de las proposiciones en una conjunción o en una disyunción no altera el resultado. En el caso de la implicación el orden de las proposiciones si puede alterar el resultado.

Para el caso de la disyunción, se puede mostrar directamente de la premisa a la conclusión.

$$\begin{array}{llr} 1. & p\ \Lambda\ q & p \\ \hline C & q\ \Lambda\ p & C_1 \end{array}$$

Por ejemplo si se tiene la siguiente premisa `(x+y = 5) Λ (z = 8)`, en la conclusión se puede cambiar el orden de sus operandos.

$$\begin{array}{lll} 1. & (x+y=5) \Lambda (z=8) & P \\ \hline C & (z=8) \Lambda (x+y=5) & C_1 \end{array}$$

Para el caso de la conjunción, también se puede pasar directamente de la premisa a la conclusión.

$$\begin{array}{lll} 1. & p \vee q & p \\ \hline C & q \vee p & C_1 \end{array}$$

Por ejemplo si se tiene la siguiente premisa `5>3 v 24<30`, en la conclusión se puede cambiar el orden de sus operandos.

$$\begin{array}{ll} 1.\ 5 > 3 \vee 24 < 30 & P \\ \hline C\ \ 24 < 30\ v\ 5 > 3 & C_1 \end{array}$$

En este caso también se puede aplicar la regla conmutativa:

$$\begin{array}{lll} 1. & 16\ es\ divisible\ por\ 8\ y\ 12\ es\ multiplo\ de\ 6 & P \\ \hline C & 12\ es\ multiplo\ de\ 6\ y\ 16\ es\ divisible\ por\ 8 & C_1 \end{array}$$

Para una lista de premisas, también es posible aplicar la regla conmutativa, para este caso se observa que en la línea 6 se obtiene la conclusión `(h v p)` y por lo tanto se puede aplicar la regla en mención quedando: `(p v h)`.

$$\begin{array}{lll} 1. & n \rightarrow \neg q & P \\ 2. & \neg\neg q & P \\ 3. & \neg(h\, V\, p) \rightarrow n & P \\ C_1 4. & \neg n & TT_{1.2} \\ C_2 5. & \neg\neg(h\, V\, p) & TT_{3.4} \\ C_3 6. & h\, V\, p & DN_5 \\ \hline C & p\, V\, h & C_6 \end{array}$$

ACTIVIDAD

- Dadas las siguientes premisas, formalicelas y aplique entre ellas la regla conmutativa de manera que la conclusión sea verdadera.
    - El premio nobel de literatura en el año anterior.
    - La ciudad con mayor densidad demográfica.
    - La monarquía más reconocida en el mundo.

  - Dadas las siguientes premisas, formalicelas y aplique entre otras la regla II conmutativa.

$$\begin{array}{lll} 1. & 27\ \text{no es un número perfecto}\ y\ 13\ \text{no es un número par} & P \\ \hline C & & \end{array}$$

3.4.10. Regla de Morgan (M)

Esta ley permite transformar una disyunción en una conjunción, y viceversa, es decir, una conjunción en una disyunción. Cuando se pasa de una a otra, se cambian los valores de afirmación y negación de los términos de la disyunción/conjunción así como de la propia operación en conjunto[17]. Para la regla de Morgan, se tienen dos reglas particulares:

Regla I

Esta regla establece que de la negación de una conjunción se obtiene la disyunción de las negaciones de las proposiciones.

$$\begin{array}{lll} 1. & \neg(p \land q) & P \\ \hline C & \neg p \lor \neg q & M_1 \end{array}$$

Si se tiene la premisa: `Es falso que, un rectángulo tiene 5 lados y 5 ángulos internos`, se tiene que las expresiones: `un rectángulo tiene 5 lados y 5 ángulos internos`, son afirmativas, pero están negadas y unidas por una conjunción.

Al aplicar la regla de Morgan, cada una de las expresiones ya no es afirmativa, por lo tanto quedan negadas y están unidad por el operador de disyunción. En este caso la conclusión queda expresada de la siguiente manera:

$$\begin{array}{lll} 1. & Es\ falso\ que, un\ rectangulo\ tiene\ 5\ lados\ y\ 5\ angulos\ internos & P \\ \hline C & Un\ rectangulo\ no\ tiene\ 5\ lados\ o\ no\ tiene\ 5\ angulos\ internos & M_1 \end{array}$$

Para el siguiente caso se tiene una lista de premisas a la cual se les aplicó una serie de reglas de inferencia. Se puede observar que en la línea 9, se tiene la expresión: `¬(x=0 ^ y=4)`, en donde se observa que es posible aplicar la regla de Morgan. La conclusión continua siendo verdadera, pero ambas expresiones quedan negadas así: `x ≠ 0 v y ≠ 4`.

$$\begin{array}{lll} 1. & x = 0 \to y > 5 & P \\ 2. & \neg(y \neq 4) & P \\ 3. & x + 5 = 7 \to x = 0 & P \\ 4. & y > 5 \to y \neq 4 & P \\ 5. & (x = 0 \land y = 4) \to x + 5 = 7 & P \\ C_1 6. & x = 0 \to y \neq 4 & T_{1.4} \\ C_2 7. & x \neq 0 & TT_{6.2} \\ C_3 8. & x + 5 \neq 7 & TT_{3.7} \\ C_4 9. & \neg(x = 0 \land y = 4) & TT_{5.8} \\ \hline C & x \neq 0 \lor y \neq 4 & M_9 \end{array}$$

17 http://www.hcornejo.com/Algebra/Apuntes%20de%20logica.pdf . Universidad Andrés Bello. Haroldo Cornejo Olivari.

Regla II

Esta regla establece que de la negación de una disyunción se obtiene la conjunción de la negación de las proposiciones.

$$\begin{array}{lll} 1. & \neg(p \, V \, q) & P \\ \hline C & \neg p \, \Lambda \, \neg q & M_1 \end{array}$$

Si se tiene la premisa: `Es falso que, un rectángulo tiene 5 lados ó 5 ángulos internos`, se tiene que las expresiones: `un rectángulo tiene 5 lados ó 5 ángulos internos`, son afirmativas, pero están negadas y unidas por una disyunción. Al aplicar la regla de Morgan, cada una de las expresiones ya no es afirmativa, por lo tanto quedan negadas y están unidad por el operador de conjunción. En este caso la conclusión queda expresada de la siguiente manera:

$$\begin{array}{lll} 1. & Es\ falso\ que, un\ rectangulo\ tiene\ 5\ lados\ \text{ó}\ 5\ angulos\ internos & P \\ \hline C & Un\ rectangulo\ no\ tiene\ 5\ lados\ y\ no\ tiene\ 5\ angulos\ internos & M_1 \end{array}$$

Para el siguiente caso se tiene una lista de premisas a la cual se les aplicó una serie de reglas de inferencia. Se puede observar que en la línea 9, se tiene la expresión: `¬(x=0 ^ y=4)`, en donde se observa que es posible aplicar la regla de Morgan.

Para el siguiente caso se puede observar que en la línea 6, se tiene la expresión: `¬(s v p)`, en donde es posible aplicar la regla de Morgan.

$$\begin{array}{lll} 1. & \neg q & P \\ 2. & \neg(p \, \Lambda \, q) & P \\ 3. & \neg[(p \, \Lambda \, q) \, V \, \neg(s \, V \, p)] \rightarrow q & P \\ C_1 4. & \neg\neg[(p \, \Lambda \, q) \, V \, \neg(s \, V \, p)] & TT_{3.1} \\ C_2 5. & (p \, \Lambda \, q) \, V \, \neg(s \, V \, p) & DN_4 \\ C_3 6. & \neg(s \, V \, p) & TP_{2.5} \\ \hline C & \neg s \, \Lambda \, \neg p & M_6 \end{array}$$

ACTIVIDAD

- Dadas las siguientes premisas, formalicelas y aplique entre ellas la regla de Morgan I y II de manera que la conclusión sea verdadera.
  - `Es falso que, un rectángulo tiene 5 lados ó 5 ángulos internos.`
  - `Es falso que, Colombia está en guerra o que no se reconozca el conflicto armado.`
  - `No es cierto que, las Universidad no se acrediten y que no se quieren someter al proceso de evaluación.`

- Dadas las siguientes premisas, formalicelas y aplique entre otras la regla II conmutativa y demuestre : w `≠ 1 v x ≠ 5.`

$$\begin{array}{lll}
1. & w = 1 \rightarrow x > 6 & P \\
2. & \neg(x \neq 5) & P \\
3. & w + 6 = 8 \rightarrow w = 1 & P \\
4. & x > 6 \rightarrow x \neq 5 & P \\
5. & (w = 1 \land x = 5) \rightarrow w + 6 = 8 & P \\
\hline
C & &
\end{array}$$

3.4.11. Regla Bicondicional (B)

Esta regla establece que es posible de un bicondicional concluir cualquiera de sus condicionales.

$$a)\ \frac{1.\quad p \leftrightarrow q \qquad P}{C \quad q \rightarrow p \qquad B_1}$$

$$b)\ \frac{1.\quad p \leftrightarrow q \qquad P}{C \quad p \rightarrow q \qquad B_1}$$

También se puede establecer que de un condicional se pueden concluir sus condicionales unidos por medio del operador de disyunción.

$$c)\ \frac{1.\quad p \leftrightarrow q \qquad P}{C \quad q \rightarrow p \land p \rightarrow q \qquad B_1}$$

La regla también permite que a partir de dos condicionales se pueda concluir el bicondicional.

$$d)\ \begin{array}{lll}
1. & q \rightarrow p & P \\
2. & p \rightarrow q & P \\
\hline
C & p \leftrightarrow q & B_{12}
\end{array}$$

$$e)\ \begin{array}{lll}
1. & p \rightarrow q & P \\
2. & q \rightarrow p & P \\
\hline
C & q \leftrightarrow p & B_{12}
\end{array}$$

Por ejemplo si se tiene las siguientes dos premisas:

$$\begin{array}{lll}
1. & Si\ 5 + 5 = 10\ entonces\ 5x\ 2 = 10 & P \\
2. & Si\ 5\ x\ 2 = 10\ entonces\ 5 + 5 = 10 & P \\
\hline
C & 5 + 5 = 10\ si\ y\ solo\ si\ 5\ x\ 2 = 10 & B_{12}
\end{array}$$

Se puede observar que a partir de sus condicionales, es posible concluir el condicional de forma tal que este sigue siendo verdadero.

Para el siguiente caso se tiene una lista de premisas a la cual se les aplicó una serie de reglas de inferencia. Se puede observar que se puede deducir de la primera premisa que es un condicional se puede obtener el bicondicional $s \Lambda q \rightarrow q$.

1.	$q \leftrightarrow (s \Lambda q)$	P
2.	$\neg[\neg(s \Lambda q) V r]$	P
$C_1$3.	$\neg\neg(s \Lambda q) \Lambda \neg r$	M_2
$C_2$4.	$\neg\neg(s \Lambda q)$	IS_3
$C_3$5.	$s \Lambda q$	DN_4
$C_4$6.	$s \Lambda q \rightarrow q$	B
C	q	$PP_{5.6}$

ACTIVIDAD

- Dadas las siguientes premisas, formalicelas y aplique entre ellas la regla de bicondicional de manera que la conclusión sea verdadera.
    - El número 14 es par si y sólo si es divisible por 2.
    - Un número es compuesto si y sólo si tiene más de dos divisores.
    - Un número es divisible por 3 si y sólo si al sumar sus cifras el resultado es múltiplo de 3.

- Dadas las siguientes premisas, complete de acuerdo a la regla del bicondicional

1.	$Si\ \mathrm{x} + 3 = 7\ entonces\ \mathrm{x} = 4$	P
2.	$Si\ x = 4\ entonces\ \mathrm{x} + 3 = 7$	P
C		

- Dadas las siguientes premisas demuestre $x^2 = y \leftrightarrow y = \pm\sqrt{x}$, aplicando entre otras la regla bicondicional.

1.	$x^2 = y \rightarrow y = \pm\sqrt{x}$	P
2.	$x^2 = y \rightarrow y > x$	P
3.	$(x^2 = y \rightarrow y > x) \rightarrow \left(y = \pm\sqrt{x} \rightarrow x^2 = y\right)$	P
C		

3.4.12. Regla de Dilema (D)

Esta regla establece que si se tiene dos proposiciones condicionales y una proposición de disyunción con los antecedentes de los condicionales, se obtiene la disyunción de los consecuentes de los condicionales.

$$\begin{array}{lll}
1. & p \rightarrow q & P \\
2. & s \rightarrow h & P \\
3. & p \vee s & P \\
\hline
C & q \vee h & D_{1,2,3}
\end{array}$$

Si se tienen las premisas con condicionales: `Si un número termina en cero entonces es divisible por 10 y Si un número termina en cinco entonces es divisible por 5 falso.` Es posible obtener una nueva premisa que contenga la disyunción de los antecedentes de las expresiones condicionales, que para este caso sería: `Un número termina en cero o en cinco.` Con base en la regla del Dilema, se obtiene como conclusión una disyunción de los consecuentes de los condicionales: `El número es divisible por 10 o por 5.`

$$\begin{array}{lll}
1. & \textit{Si un número termina en cero entonces es divisible por } 10 & P \\
2. & \textit{Si un número termina en cinco entonces es divisible por } 5 & P \\
3. & \textit{Un número termina en cero o en cinco} & P \\
\hline
C & \textit{El número es divisible por } 10 \textit{ o por } 5 & D_{1,2,3}
\end{array}$$

Por ejemplo si se tienen las premisas 1,2 y 3, se puede obtener una nueva premisa aplicando la segunda regla de simplificación. De acuerdo a la configuración que se tiene, es posible entonces aplicar la regla de dilema a las premisas 1,2 y 4.

$$\begin{array}{lll}
1. & s \rightarrow (s \wedge t) & P \\
2. & q \rightarrow p & P \\
3. & s & P \\
C_1 4. & s \vee q & IIS_3 \\
\hline
C & p \vee (s \wedge t) & D_{1,2,4}
\end{array}$$

ACTIVIDAD

- Aplique las reglas de inferencia necesarias a las siguientes premisas, para demostrar `(s v q).`

$$\begin{array}{lll}
1. & p \rightarrow \neg(s \vee q) & P \\
2. & h \rightarrow q & P \\
3. & p \rightarrow s & P \\
4. & h & P \\
\hline
C & &
\end{array}$$

- Dada la siguiente proposición complete las premisas faltantes y su correspondiente conclusión.

$$\begin{array}{lll}
1. & \textit{Si un número termina en dos entonces es par} & P \\
2. & & \\
3. & & \\
\hline
C & &
\end{array}$$

3.4.13. Regla de Simplificación Disyuntiva (S.D)

Esta regla establece que si se tiene la disyunción de una proposición consigo misma, se obtiene la misma proposición.

$$\begin{array}{lcr} 1. & (p \vee p) & P \\ \hline C & p & SD_1 \end{array}$$

Por ejemplo si se tiene la premisa: `1 es divisible por 1 o 1 es divisible por 1`, se puede simplificar directamente por: `1 es divisible por`.

$$\begin{array}{llr} 1. & 1\ es\ divisible\ por\ 1\ o\ 1\ es\ divisible\ por\ 1 & P \\ \hline C & 1\ es\ divisible\ por\ 1 & SD_1 \end{array}$$

Para la siguiente lista de premisas se aplican reglas de inferencia y se puede observar que la premisa de la línea 6 tiene la estructura `n v n`, en este caso es posible aplicar la regla de simplificación disyuntiva, obteniendo como conclusión `n`.

$$\begin{array}{llr} 1. & \neg(r \wedge t) & P \\ 2. & \neg t \rightarrow n & P \\ 3. & \neg r \rightarrow n & P \\ 4. & m \rightarrow \neg n & P \\ C_1 5. & \neg r \vee \neg t & M_1 \\ C_2 6. & n \vee n & D_{3,2,5} \\ \hline C & n & SD_6 \end{array}$$

Otra definición que se encuentra con mucha frecuencia en diferentes recursos es: Si disponemos de dos premisas que corresponden a dos implicaciones con el mismo consecuente, y sus antecedentes se corresponden con los dos miembros de una disyunción, podemos concluir con el consecuente de ambas implicaciones[18].

Por ejemplo si se tienen las premisas:

- `El viaje es por aerolínea nacional o extranjera.`
- `Si viajas por aerolínea nacional, entonces acumulas millas`
- `Si viajas por aerolínea extranjera, entonces acumulas millas`
- `Entonces, acumulas millas`

Formalizando las anteriores expresiones, se tiene respectivamente:

- `p v q`
- `p → r`
- `q → r`

De lo cual se puede concluir `r`.

[18] http://fabricioflores.wordpress.com/category/sistemas-expertos/ . Fabricio Flores. Reglas de inferencia Lógica.

ACTIVIDAD

- Aplique las reglas de inferencia a las siguientes premisas, para demostrar (h ^ t).

1.	$\neg(\neg p \vee \neg q)$	P
2.	$p \rightarrow (h \wedge t)$	P
3.	$q \rightarrow (h \wedge t)$	P

C

3.4.14. Regla Condicional Contrarrecíproca (C.C)

Esta regla establece que si se tiene un condicional, se obtiene un condicional que tiene como antecedente la negación del consecuente del primer condicional y como consecuente la negación del antecedente del primer condicional.

$$a)\ \frac{1.\quad p \rightarrow q \qquad P}{C \quad \neg q \rightarrow \neg p \qquad CC_1} \qquad b)\ \frac{1.\quad \neg q \rightarrow \neg p \qquad P}{C \quad p \rightarrow q \qquad CC_1}$$

O también se puede tener:

$$c)\ \frac{1.\quad q \rightarrow p \qquad P}{C \quad \neg p \rightarrow \neg q \qquad CC_1} \qquad d)\ \frac{1.\quad \neg p \rightarrow \neg q \qquad P}{C \quad q \rightarrow p \qquad CC_1}$$

De a) y b) se puede deducir que: $p \rightarrow q \leftrightarrow \neg q \rightarrow \neg p$
De c) y d) se puede deducir que: $q \rightarrow p \leftrightarrow \neg p \rightarrow \neg q$

Por ejemplo si se tiene la premisa: Si un polígono es un cuadrilátero entonces los ángulos interiores suman 360°. Corresponde a la estructura:

$$a)\ \frac{1.\quad p \rightarrow q \qquad P}{C \quad \neg q \rightarrow \neg p \qquad CC_1}$$

Por lo tanto premisa como conclusión quedan de la siguiente manera:

$$\frac{1.\ \textit{Si un polígono es un cuadrilátero} \text{ entonces } \textit{los ángulos interiores suman } 360° \qquad P}{C\ \ \textit{Si los ángulos interiores de un polígonos no suman } 360° \ \textit{entonces no es un cuadrilatero} \qquad CC_1}$$

$$\begin{array}{ll} 1.\ \textit{Si los ángulos interiores de un polígono no suman } 360° \textit{ entonces} & \\ \quad \underline{\textit{no es un cuadrilátero}} & P \\ \hline C\ \textit{Si un polígono es un cuadrilátero entonces} & \\ \quad \textit{los angulos interiores suman } 360° & CC_1 \end{array}$$

Para la siguiente lista de premisas se aplican reglas de inferencia y se puede observar que la premisa de la línea 6 tiene la estructura `p → (p ^ q)`, en este caso es posible aplicar la regla de condicional Contrarrecíproca, obteniendo como conclusión `¬(p ^ q)→ ¬p.`

$$\begin{array}{lll} 1. & p \to t & P \\ 2. & t \to \neg s & P \\ 3. & \neg s \to (p \wedge q) & P \\ 4. & \neg\neg q & P \\ C_1 5. & p \to \neg s & T_{1.2} \\ C_2 6. & p \to (p \wedge q) & T_{5.3} \\ \hline C & \neg(p \wedge q) \to \neg p & CC_6 \end{array}$$

ACTIVIDAD

- Aplique las reglas de inferencia a las siguientes premisas, para demostrar `¬p v q` .

$$\begin{array}{lll} 1. & p \to q & P \\ 2. & \neg q & P \\ C_1 3. & \neg q \to \neg p & CC_1 \\ C_2 4. & \neg p & PP_{2.3} \\ \hline C & \neg p \, V \, q & IIS_4 \end{array}$$

4. CALCULO DE PREDICADOS

Al finalizar el estudio de esté capítulo el estudiante estará en condiciones de:

- Identificar los elementos fundamentales del cálculo de predicados y cuál es su relación con el cálculo proposicional.
- Entender y aplicar los conceptos: término, predicado.
- Representar los predicados y su lista de términos.
- Establecer equivalencias entre proposiciones que utilizan cuantificadores
- Conocer y aplicar el concepto de argumento constante y argumento variable.
- Conocer las equivalencias lógicas clásicas dentro del cálculo de predicados.

4.1. Introducción

En este capítulo se analizarán los elementos fundamentales del cálculo de predicados, el cual es un tema que permite ampliar los conceptos del cálculo proposicional. Además de trabajar con los conocidos valores booleanos, se podrá dar mayor cobertura a otro tipo de expresiones con más poder de deducción. La lógica de predicados es una generalización de la lógica proposicional, en la cual se introducen nuevos elementos del lenguaje que permiten estudiar la estructura interna de los enunciados (sus propiedades y las relaciones entre los objetos).

Existen situaciones en las cuales el cálculo proposicional no es suficiente para representar todas las afirmaciones que se puedan expresar. Por ejemplo, si se tienen expresiones como `“w < x”`, `“y = w * 2”`, no se puede afirmar si estas son verdaderas o falsas. Pero en el momento en el cual se asocien valores concretos a cada una de las variables `w,x,y`, ya se podrá dar un valor de verdad a la expresión y la misma ya será una proposición.

Otra situación en la cual el cálculo proposicional resulta insuficiente en algunas situaciones es cuando se analizan inferencias. Por ejemplo para la siguiente inferencia, no se puede determinar su validez.

```
Todos los Quindianos son caficultores
Todos los empleados son Quindianos
_____________________________________
Todos los empleados son caficultores
```

A priori se puede decir que este es un razonamiento válido y se puede representar como se hizo en capítulos anteriores:

```
p: Todos los Quindianos son caficultores
q: Todos los empleados son Quindianos
r: Todos los empleados son caficultores
```

Representando las premisas y la conclusión tenemos:

$$\begin{array}{l} 1.\ p \\ 2.\ q \\ \hline C\ r \end{array}$$