1.1 Conceptos básicos de la teoría de conjuntos

La expresión *conjunto* es un término matemático introducido en 1879, por Georg Cantor (1845-1918). Un **conjunto** es un grupo o una colección de objetos; cada objeto que pertenece al conjunto se denomina elemento o miembro del conjunto.

Si T es un conjunto, la notación $\boldsymbol{x \in T}$ significa que x es un elemento de T. La notación $\boldsymbol{x \notin T}$ significa que x no es un elemento de T.

Un conjunto se puede expresar de las siguientes maneras:

Descripción verbal: "El conjunto de los números naturales pares menores que 15".

Extensión: El conjunto se describe listando todos sus elementos entre llaves, por ejemplo: A = {2, 4, 6, 8, 10, 12, 14}.

Por compresión o en forma constructiva del conjunto: $\{x | x$ es un número natural par menor que 15}.

Alerta

El símbolo | significa "tal que".

Diagramas de Venn: Son regiones cerradas que sirven para visualizar el contenido de un conjunto o las relaciones entre conjuntos.

Por ejemplo, el conjunto de números naturales pares menores que 9:

Alerta

Los conjuntos se denotan entre llaves { }. Por ejemplo, el conjunto de números naturales menores que 9: { 1, 2, 3, 4, 5, 7, 8 }.

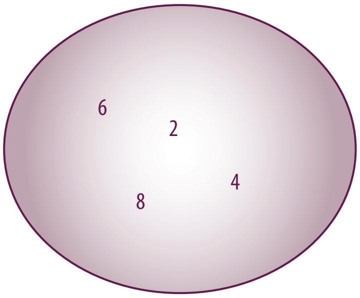

Figura 1.1 Diagrama de Venn del conjunto de números naturales pares menores que 9.

Problema resuelto

Dada la descripción verbal: "El conjunto de los días de la semana", expresarla por extensión, en su forma constructiva o por compresión y por diagrama de Venn.

Solución

Por extensión: V = {lunes, martes, miércoles, jueves, viernes, sábado, domingo}

En su **forma constructiva** o por **compresión**: $V = \{x | x$ es un día de la semana}

Por **diagrama de Venn**:

Figura 1.2 Diagrama de Venn.

Subconjuntos

Si cada elemento de un conjunto A es también un elemento del conjunto B, se dice que A es un subconjunto de B. La notación $A \subset B$ significa que A está incluido en B y se lee: "A es subconjunto de B" o "A está contenido en B".

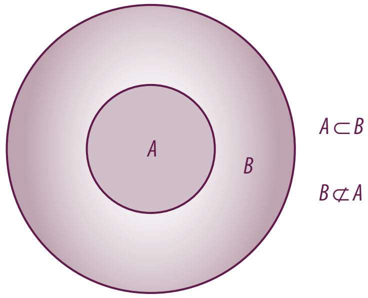

Figura 1.3

Si no todos los elementos de un conjunto A son elementos del conjunto B, se dice que A no es subconjunto de B. En este caso, la notación $A \not\subset B$ significa que A no es un subconjunto de B.

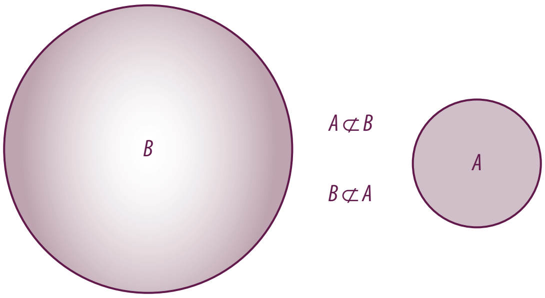

Figura 1.4

Un conjunto que no contiene elementos se conoce como **conjunto vacío** o **conjunto nulo.** Se utiliza el símbolo $\varnothing$ para denotar el conjunto vacío; sin embargo, es un error escribir $\{\varnothing\}$, ya que el conjunto vacío no tiene elementos. Por ejemplo, el número de mujeres mayores de 500 años que aún vive.

Un **conjunto universo** U es aquel que contiene a todos los elementos a considerar. Gráficamente se le representa mediante un rectángulo.

Figura 1.5 Conjunto universo.

El complemento del conjunto A con respecto al conjunto universo U es el conjunto de todos los elementos de U que no están en A y se denota por A^c:

$$A^c = \{x \in U \mid x \notin A\}$$

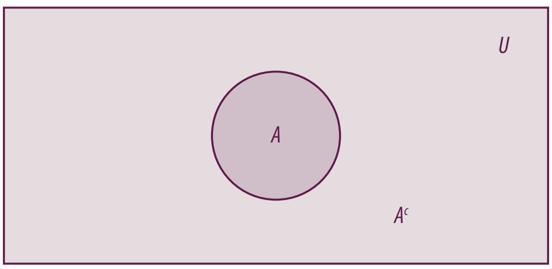

Figura 1.6

Ejemplo:

Un dígito es cada una de las cifras que componen un número en un sistema determinado; en el sistema decimal son: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9.

$U = \{x | x$ son todos los dígitos decimales$\} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

$A = \{x | x$ son todos los dígitos decimales pares$\} = \{2, 4, 6, 8\}$

$B = \{x | x$ son todos los dígitos decimales impares$\} = \{1, 3, 5, 7, 9\}$

$C = \{x | x = 0\} = \{0\}$

Obsérvese que: $A \subset U$, $B \subset U$, $C \subset U$

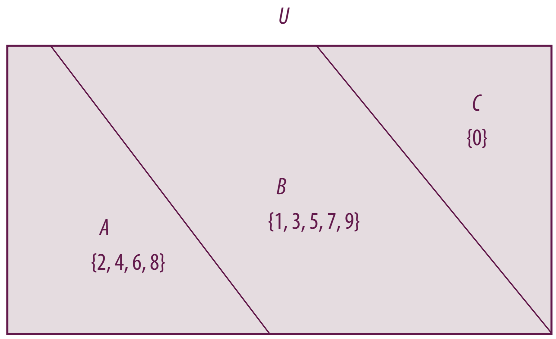

Figura 1.7

Un conjunto **finito** es aquel cuyos elementos pueden ser contados.

Ejemplos:

$A = \{x | x$ es el número de días de la semana$\}$

$B = \{x | x$ es el número de alumnos en una universidad dada$\}$

Igualdad de conjuntos

Si A y B son conjuntos, entonces el conjunto A será igual al conjunto B siempre que se cumplan las dos condiciones siguientes:

a) todo elemento de A es un elemento de B, y

b) todo elemento de B es un elemento de A.

Un conjunto **infinito** es aquel cuyos elementos no pueden ser contados.

La **cardinalidad** de un conjunto se define como el **número de elementos** que tiene. Se denota por medio de los símbolos N o #. Por ejemplo, de los conjuntos anteriores $N(A) = 7$, $N(B) = 1\,500$.

Para un conjunto **infinito**, su **cardinalidad no** está **definida**.

Dos **conjuntos** son **iguales** si tienen exactamente los mismos elementos; se denota por el símbolo =.

$$A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$$
$$B = \{x | x \text{ es un dígito}\}$$
$$A = B$$

Operaciones con conjuntos

La unión de los conjuntos A y B es el conjunto de todos los elementos de A con todos los elementos de B, sin repetir ninguno, y se denota por $A \cup B$:

$$A \cup B = \{x | x \in A \textbf{ o } x \in B\}$$

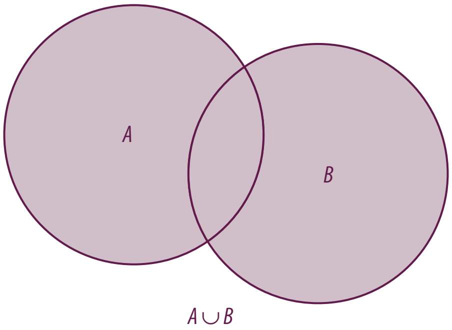

Figura 1.8

La intersección de los conjuntos A y B es el conjunto de los elementos de A que también pertenecen a B y se denota como $A \cap B$:

$$A \cap B = \{x | x \in A \textbf{ y } x \in B\}$$

De acuerdo con estas definiciones, la cardinalidad de $A \cup B$ está dada por:

$$N(A \cup B) = N(A) + N(B) - N(A \cap B)$$

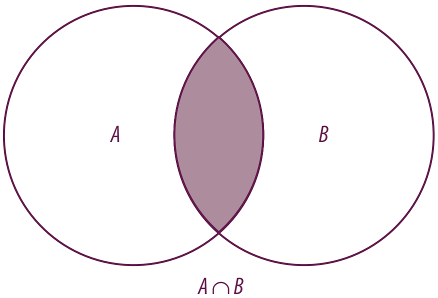

Figura 1.9

Dos conjuntos son **disjuntos** cuando su intersección es el conjunto vacío, es decir, cuando no tienen nada en común.

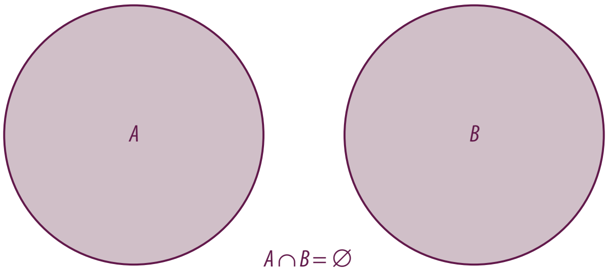

Figura 1.10

La **diferencia** de los conjuntos A y B (en ese orden) es el conjunto de los elementos que pertenecen a A y no pertenecen a B y se denota como $A - B$:

$$A - B = \{x | x \in A \textbf{ y } x \notin B\}$$

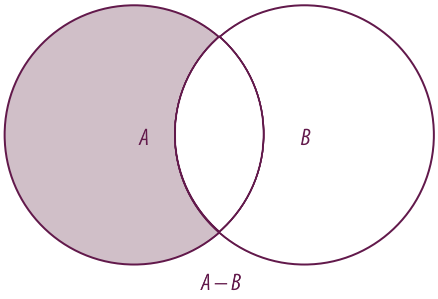

Figura 1.11

La cardinalidad de $A - B$ es:

$$N(A - B) = N(A) - N(A \cap B)$$

La cardinalidad del complemento del conjunto A es:

$$N(A^C) = N(U) - N(A)$$

Problema resuelto

Sean $A = \{1, 2, 3, 4\}$; $B = \{2, 4, 6, 8\}$; $C = \{3, 4, 5, 6\}$

Determinar:

a) $A \cup B$
b) $A \cup C$
c) $B \cup C$
d) $B \cup B$

Solución

a) $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 6, 8\}$
b) $A \cup C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
c) $B \cup C = \{2, 4, 6, 3, 5, 8\}$
d) $B \cup B = \{2, 4, 6, 8\}$

El conjunto potencia de un conjunto A se denota por $P(A)$, o Pot(A) es el conjunto formado por todos los subconjuntos de A.

Ejemplo:

Sea $A = \{m, n, p\}$

Los subconjuntos de A son:

$$\{m\}, \{n\}, \{p\}, \{m, n\}, \{m, p\}, \{n, p\}, \{m, n, p\}, \varnothing$$

Entonces, el conjunto potencia de A es:

$$\mathrm{P}(A) = \{\{m\}, \{n\}, \{p\}, \{m, n\}, \{m, p\}, \{n, p\}, \{m, n, p\}, \varnothing\}$$

Problema resuelto

Dado el conjunto $A = \{6, 2, 8, 4, 3\}$, determinar todos los subconjuntos de A que se puedan construir con sus elementos, es decir el conjunto potencia.

Solución

Pot(A) = $\{\{6\}, \{2\}, \{8\}, \{4\}, \{3\}, \{6, 2\}, \{6, 8\}, \{6, 4\}, \{6, 3\}, \{2, 8\}, \{2, 4\}, \{2, 3\}, \{8, 4\}, \{8, 3\}, \{4, 3\}, \{6, 2, 8\}, \{6, 2, 4\}, \{6, 2, 3\}, \{6, 8, 4\}, \{6, 8, 3\}, \{6, 4, 3\}, \{2, 8, 4\}, \{2, 8, 3\}, \{8, 4, 3\}, \{6, 2, 8, 4\}, \{6, 2, 8, 3\}, \{2, 8, 4, 3, \}, \{6, 8, 4, 3, \}, \{6, 2, 4, 3, \}, \{6, 2, 8, 4, 3\}, \{\varnothing\}\}$

Conjunto unitario

Es todo conjunto que está formado por un solo y único elemento.

Ejemplos:

$A = \{3\}$

$B = \{$números pares entre 4 y 8$\} = \{6\}$

$C = \{$la capital de Jalisco$\} = \{$Guadalajara$\}$

$D = \{x | 2x + 1 = 6\} = \{2.5\}$