Continúa

2. Realizar traducción lógica.

   Como se observa, las proposiciones p y q están negadas, por lo que su traducción lógica es:

$$\sim p \wedge \sim q$$

3. Obtener la cantidad de combinaciones de valores de verdad.

   Como se tienen dos variables proposicionales, la cantidad de combinaciones de valores de verdad será:

$$2^2 = 4$$

4. Asignar valores de verdad a variables proposicionales.

   En este caso, también se incluyen los valores de verdad de las proposiciones negadas.

Tabla 2.10

p	q	$\sim p$	$\sim q$
V	V	F	F
V	F	F	V
F	V	V	F
F	F	V	V

5. Resolver las operaciones lógicas.

Tabla 2.11

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$\sim p \wedge \sim q$
V	V	F	F	F
V	F	F	V	F
F	V	V	F	F
F	F	V	V	V

2.5 Los argumentos: premisas y conclusiones

Los razonamientos que estudia la lógica se llaman argumentos y su tarea consiste en descubrir qué es lo que hace que un argumento sea válido y constituya una inferencia correcta.

Por su parte, la inferencia es una actividad con la cual se afirma una proposición sobre otra y otras proposiciones se aceptan como punto de partida del proceso.

Un argumento es un conjunto de una o más proposiciones, la última de las cuales se denomina conclusión, mientras que las anteriores se llaman premisas.

De manera intuitiva, las premisas son la evidencia o las razones que deben convencernos de la veracidad de la conclusión, y el argumento es la concatenación de las primeras con la última.

Es habitual representar los argumentos haciendo un listado de las premisas y la conclusión, separando la última mediante una línea, como se observa a continuación:

$$\left.\begin{array}{c}\text{Proposición 1}\\ \text{Proposición 2}\\ \vdots\\ \hline \text{Conclusión}\end{array}\right\}\ \text{Premisas}$$

Otra manera de representar los argumentos es haciendo un listado de las premisas y la conclusión, separándolos con el símbolo $\therefore$, que significa: por tanto.

Conviene hacer notar que cada argumento tiene solo una conclusión. El siguiente es un ejemplo que contiene tres proposiciones simples (en dos premisas).

EJEMPLO

Si Alfredo es elegido presidente de la asociación de colonos, entonces Bernardo es elegido vicepresidente y Carlos es elegido tesorero. Bernardo no es elegido vicepresidente, por tanto Alfredo no es elegido presidente de la asociación de colonos.

En este caso, la proposición: "Si Alfredo es elegido presidente de la asociación de colonos, entonces Bernardo es elegido vicepresidente y Carlos es elegido tesorero", representa la primera premisa; mientras que la proposición "Bernardo no es elegido vicepresidente" es la segunda premisa. De estas dos premisas se obtiene una tercera proposición: "Alfredo no es elegido presidente de la asociación de colonos", que es la conclusión.

Ahora, hay que asignar variables proposicionales a cada proposición simple que aparece en el argumento; esto es:

a: Alfredo es elegido presidente de la asociación de colonos.

b: Bernardo es elegido vicepresidente.

c: Carlos es elegido tesorero.

Enseguida, se hace la traducción lógica de dicho argumento y se escribe en alguna de las dos formas descritas, para representar los argumentos:

$$\begin{array}{ll} 1.\ (a \Rightarrow b) \wedge c \\ 2.\ \sim b \\ \quad \therefore \sim a \end{array} \qquad \text{o} \qquad \begin{array}{l} 1.\ (a \Rightarrow b) \wedge c \\ 2.\ \underline{\sim b} \\ \quad \sim a \end{array}$$

Por último, solo falta verificar si el argumento es válido; no obstante, esa cuestión se analizará en las siguientes secciones.

Como se puede observar, en el ejemplo anterior fue fácil identificar las premisas y la conclusión; sin embargo, no siempre resulta sencillo poder identificar las premisas y la conclusión de un argumento, para esto pueden ser útiles los adverbios que se listan en la tabla 2.12:

Tabla 2.12 Adverbios que indican premisas o conclusiones

Adverbios que indican premisa	Adverbios que indican conclusión
Puesto que	Por tanto
Dado que	Se sigue que
Si	Resulta que
Considerando	Se infiere que
Puesto	Luego
Como	Tomando en cuenta
Ya que	Por consiguiente
Por que	En consecuencia
Aunque	Se deduce que
Toda vez que	Por lo que

Clasificación de argumentos: tautología, contradicción y contingencia

A partir del resultado de las tablas de verdad, es posible clasificar los argumentos en tres tipos: tautología, contradicciones y contingencias.

Una **tautología** es una proposición que es verdadera para todos los posibles valores de verdad de sus componentes simples.

Ejemplo

Tabla 2.13

p	$p \Leftrightarrow p$
V	V
F	V

Una proposición es llamada **contradicción** o **absurdo** si ofrece un resultado falso para todos los posibles valores de verdad de sus componentes simples.

Ejemplo

Tabla 2.14

p	$\sim p$	$p \wedge \sim p$
V	F	F
F	V	F

Una proposición es una **contingencia** cuando puede ser verdadera o falsa, dependiendo de los valores de verdad de sus componentes simples.

Ejemplo

Tabla 2.15

p	q	$\sim p$	$\sim p \vee q$
V	V	F	V
V	F	F	F
F	V	V	V
F	F	V	V

2.6 Métodos de demostración

La demostración es un razonamiento o serie de razonamientos que prueba la validez de un nuevo conocimiento mediante el establecimiento de sus conexiones necesarias con otros conocimientos.

Cuando un conocimiento queda demostrado, entonces se le reconoce como válido y es admitido dentro de la disciplina correspondiente. La demostración es, por tanto, el enlace entre los conocimientos recién adquiridos y el conjunto de los conocimientos adquiridos con anterioridad. El enlace entre los conocimientos recién adquiridos y los adquiridos con anterioridad está constituido por una sucesión finita de proposiciones que bien son postulados o bien son conocimientos cuya validez se ha inferido de otras proposiciones mediante operaciones lógicas perfectamente coordinadas. La demostración permite explicar unos conocimientos por otros; por tanto, constituye una prueba rigurosamente racional.

Hoy día, hay diversos métodos para demostrar la validez de un argumento, entre los principales destacan: el de las tablas de verdad, la prueba formal de validez, la prueba de invalidez, la prueba condicional y la prueba indirecta.

Método de tablas de verdad

Cuando un argumento es una tautología se considera que este es válido, pero si es una contradicción es inválido; lo mismo ocurre con una contingencia.

Para obtener la validez de un argumento por tabla de verdad se efectúan los siguientes pasos:

1. Asignar variables proposicionales a cada proposición simple.
2. Obtener la traducción lógica de las premisas.
3. Organizar el argumento en forma horizontal, uniendo las premisas con el operador lógico $\wedge$.
4. Obtener la cantidad de todas las combinaciones de valores de verdad de las premisas. La cantidad de valores de verdad está dado por la fórmula 2^n, donde n es la cantidad de variables proposicionales de las premisas.

Nota

Por lo general, se utilizan líneas en la parte inferior de la tabla de verdad para ayudar a identificar las variables lógicas involucradas en una operación lógica.

5. Asignar a cada variable proposicional los valores de verdad correspondientes.
6. Resolver las operaciones lógicas, iniciando por las premisas y finalizando con la conclusión. El símbolo de por tanto ($\therefore$) equivale a la condicional $\Rightarrow$.

Ejemplo

De acuerdo con el argumento de un ejemplo anterior: “Si Alfredo es elegido presidente de la asociación de colonos, entonces Bernardo es elegido vicepresidente y Carlos es elegido tesorero”. “Bernardo no es elegido vicepresidente, por tanto Alfredo no es elegido presidente de la asociación de colonos”, verificar su validez por tablas de verdad.

Solución

1. Asignar variables proposicionales.

a: Alfredo es elegido presidente de la asociación de colonos.

b: Bernardo es elegido vicepresidente.

c: Carlos es elegido tesorero.

2. Realizar traducción lógica.

a. $(a \Rightarrow b) \wedge c$

b. $\sim b$

$\therefore \sim a$

3. Organizar argumento.

$\{[(a \Rightarrow b) \wedge c] \wedge \sim b\} \therefore \sim a$

4. Obtener la cantidad de combinaciones de valores de verdad.

Como en este caso se tienen tres variables proposicionales, la cantidad de combinaciones de valores de verdad será: $2^3 = 8$.

5. Asignar valores de verdad a variables proposicionales.

Tabla 2.16

a	b	c	$\{[(a$	$\Rightarrow$	$b)$	$\wedge$	$c]$	$\wedge$	$\sim b\}$	$\therefore$	$\sim a$
V	V	V	V		V		V		F		F
V	V	F	V		V		F		F		F
V	F	V	V		F		V		V		F
V	F	F	V		F		F		V		F
F	V	V	F		V		V		F		V
F	V	F	F		V		F		F		V
F	F	V	F		F		V		V		V
F	F	F	F		F		F		V		V

6. Resolver las operaciones lógicas.

Tabla 2.17

a	b	c	$\{[(a$	$\Rightarrow$	$b)$	$\wedge$	$c]$	$\wedge$	$\sim b\}$	$\therefore$	$\sim a$
V	V	V	V	V	V	V	V	F	F	V	F
V	V	F	V	V	V	F	F	F	F	V	F
V	F	V	V	F	F	F	V	F	V	V	F

V	F	F	V	F	F	F	F	F	V	V	F
F	V	V	F	V	V	V	V	F	F	V	V
F	V	F	F	V	V	F	F	F	F	V	V
F	F	V	F	V	F	V	V	V	V	V	V
F	F	F	F	V	F	F	F	F	V	V	V

Como el argumento es una tautología, entonces se considera que es válido.

Ejemplo

Considerar el siguiente argumento:

"Si Enrique estudia, entonces aprobará lógica y geometría. Enrique no aprobó lógica, en consecuencia, Enrique no estudió y no aprobó geometría".

Verificar su validez por tablas de verdad.

Solución

1. Asignar variables proposicionales.

   e: Ernesto estudia.

   l: Aprobará lógica.

   g: Aprobará geometría.

2. Realizar traducción lógica.

   a. $e \Rightarrow (l \wedge g)$

   b. $\sim l$

   $\therefore (\sim e \wedge \sim g)$

3. Organizar argumento.

   $\{[e \Rightarrow (l \wedge g)] \wedge \sim l\} \therefore (\sim l \wedge \sim g)$

4. Obtener la cantidad de combinaciones de valores de verdad.

   Como se tienen tres variables proposicionales, la cantidad de combinaciones de valores de verdad será: $2^3 = 8$.

5. Asignar valores de verdad a variables proposicionales.

Tabla 2.18

e	l	g	$\{[e$	$\Rightarrow$	$(l$	$\wedge$	$g)]$	$\wedge$	$\sim l\}$	$\therefore$	$(\sim e$	$\wedge$	$\sim g)$
V	V	V	V		V		V		F		F		F
V	V	F	V		V		F		F		F		V
V	F	V	V		F		V		V		F		F
V	F	F	V		F		F		V		F		V
F	V	V	F		V		V		F		V		F
F	V	F	F		V		F		F		V		V
F	F	V	F		F		V		V		F		F
F	F	F	F		F		F		V		V		V

Continúa

6. Resolver las operaciones lógicas.

Tabla 2.19

e	l	g	$\{[e$	$\Rightarrow$	$(l$	$\wedge$	$g)]$	$\wedge$	$\sim l\}$	$\therefore$	$(\sim e$	$\wedge$	$\sim g)$
V	V	V	V	V	V	V	V	F	F	V	F	F	F
V	V	F	V	F	V	F	F	F	F	V	F	F	V
V	F	V	V	F	F	F	V	F	V	V	F	F	F
V	F	F	V	F	F	F	F	F	V	V	F	F	V
F	V	V	F	V	V	V	V	F	F	V	V	F	F
F	V	F	F	V	V	F	F	F	F	V	V	V	V
F	F	V	F	V	F	F	V	V	V	F	F	F	F
F	F	F	F	V	F	F	F	V	V	V	V	V	V

Como el argumento es una contingencia, entonces se considera como inválido.

Prueba formal de validez

Cuando el argumento tiene más de tres proposiciones simples diferentes no es fácil determinar la validez o invalidez de un argumento mediante tablas de verdad, pues resultaría bastante tedioso hacer dicha tabla de verdad, además de que se puede incurrir en errores involuntarios.

Por ese motivo, el método más conveniente para obtener la validez de los argumentos es la prueba formal de validez, la cual utiliza reglas válidas, como las reglas de inferencia y las reglas de reemplazo o equivalencia.

Pero, antes de utilizar las reglas de inferencia y las reglas de reemplazo o equivalencia, primero es necesario conocer su definición y sus aspectos fundamentales.

Reglas de inferencia

Las reglas de inferencia son formas de argumentos cuya validez puede ser demostrada por tablas de verdad; además, estas reglas permiten establecer conclusiones muy bien formadas y válidas a partir de otras premisas. En general son usadas para analizar los argumentos con muchas premisas o cuando se tienen cuatro o más proposiciones simples.

1. **Modus ponens (MP)**

   Permite eliminar el antecedente siempre que la segunda premisa sea dicho antecedente.

   $p \Rightarrow q$

   p

   $\therefore q$

2. **Modus tollens (MT)**

   Permite eliminar el consecuente siempre y cuando esté negado en la segunda premisa, dando como consecuencia el antecedente negado.

   $p \Rightarrow q$

   $\sim q$

   $\therefore \sim p$

3. Silogismo disyuntivo (SD)

Permite eliminar una de las dos disyunciones siempre que una de las dos esté negada en la segunda premisa.

$p \vee q$ $\quad\quad$ $p \vee q$

$\sim p$ $\quad\quad$ $\sim q$

$\therefore q$ $\quad\quad$ $\therefore p$

4. Silogismo hipotético (SH)

Permite eliminar el consecuente de la primera premisa y el antecedente de la segunda premisa, siempre y cuando sean iguales.

$p \Rightarrow q$

$q \Rightarrow r$

$\therefore p \Rightarrow r$

5. Adición (AD)

Permite agregar las variables proposicionales que se necesiten.

p

$\therefore p \vee q$

6. Simplificación (SIM)

Permite eliminar las variables proposicionales que no se necesiten.

$p \wedge q$ $\quad\quad$ $p \wedge q$

$\therefore p$ $\quad\quad$ $\therefore q$

7. Conjunción (CONJ)

Permite unir dos premisas diferentes.

p

q

$\therefore p \wedge r$

8. Dilema constructivo (DC)

Permite eliminar los antecedentes de las dos condicionales, dando como resultado la disyunción de los consecuentes.

$(p \Rightarrow q) \wedge (r \Rightarrow s)$

$p \vee r$

$\therefore q \vee s$

9. Dilema destructivo (DD)

Permite eliminar los antecedentes de las dos condicionales, dando como resultado la disyunción de la negación de los consecuentes.

$(p \Rightarrow q) \wedge (r \Rightarrow s)$

$\sim q \vee \sim s$

$\therefore \sim p \vee \sim q$

10. Absorción (ABS)

Permite reescribir el consecuente, dando como resultado la conjunción del antecedente y consecuente.

$p \Rightarrow q$

$\therefore p \Rightarrow (p \wedge q)$

Reglas de reemplazo o equivalencia

No siempre un argumento válido o inválido se puede comprobar por medio de las reglas de inferencia; por eso, se utilizan otras reglas conocidas como reglas de reemplazo o reglas de equivalencia, que sustituyen o reemplazan (según sea necesario) para lograr la demostración o prueba de validez del argumento.

Nota

Se utiliza el símbolo $\equiv$ para indicar la equivalencia de las proposiciones y no confundirlo con el símbolo $\Leftrightarrow$, aunque lógicamente sean equivalentes.

1. **Leyes de De Morgan (DM)**
   Permite cambiar de disyunción a conjunción y viceversa, negando ambas variables lógicas.
   $\sim(p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$
   $\sim(p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$

2. **Conmutación (CONM)**
   Permite cambiar el orden de las variables lógicas sin cambiar el operador lógico.
   $(p \vee q) \equiv (q \vee p)$
   $(p \wedge q) \equiv (q \wedge p)$
   $(p \Leftrightarrow q) \equiv (q \Leftrightarrow p)$

3. **Doble negación (DN)**
   Si la negación de cualquier proposición p verdadera es falsa, entonces cuando se vuelve a negar esta será nuevamente verdadera y viceversa.
   $\sim(\sim p) \equiv p$

4. **Distribución (DIS)**
   Permite distribuir la variable lógica de afuera y su operador lógico con las variables lógicas de dentro y su operador lógico.
   $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge q)$
   $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee q)$

5. **Tautología (TAU)**
   Permite unir dos variables lógicas en una sola.
   $(p \wedge p) \equiv p$
   $(p \vee p) \equiv p$

6. **Asociación (ASO)**
   Permite agrupar diferentes formas de las variables lógicas, siempre y cuando sea el mismo operador lógico.
   $p \wedge (q \wedge r) \equiv (p \wedge q) \wedge r$
   $p \vee (q \vee r) \equiv (p \vee q) \vee r$

7. **Implicación material (IMP)**
   Permite cambiar de disyunción a condicional y viceversa.
   $(p \Rightarrow q) \equiv (\sim p \vee q)$

8. **Transposición (TRAN)**
   Permite conmutar las variables lógicas de la condicional negando cada una de estas.
   $(p \Rightarrow q) \equiv (\sim q \Rightarrow \sim p)$

9. **Exportación (EXP)**
   Permite cambiar de conjunción a condicional y viceversa, modificando su agrupación.
   $[(p \wedge q) \Rightarrow r] \equiv [p \Rightarrow (q \Rightarrow r)]$

10. **Equivalencia material (EM)**
    Permite reescribir la bicondicional.
    $(p \Leftrightarrow q) \equiv [(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)]$
    $(p \Leftrightarrow q) \equiv [(p \wedge q) \vee (\sim p \wedge \sim q)]$

Pasos para demostrar la validez de un argumento

La prueba formal de validez consiste en deducir la conclusión del argumento en función de sus premisas, esto es, que las premisas infieran la conclusión.

A fin de que una demostración, por la prueba formal de validez, resulte perfectamente clara, se deben seguir los siguientes pasos:

1. Asignar variables proposicionales a cada proposición simple.
2. Realizar la traducción lógica de las premisas.
3. Organizar el argumento con sus premisas en forma vertical, escribiendo antes de cada premisa un número de premisa consecutivo.
4. Utilizar las reglas de inferencia y/o de reemplazo que conduzcan a nuevas premisas (inferencias). Estas siempre deben ser antecedidas por un nuevo número de premisa. Al utilizar las reglas se debe escribir su abreviatura y el número o números de las premisas de las que se ha deducido.
5. El proceso de inferencia termina cuando se llega a la conclusión del argumento.

Además del proceso anterior, también es necesario considerar algunas condiciones para la demostración:

1. Utilizar todas las premisas.
2. Utilizar todas las nuevas premisas obtenidas.
3. Es posible utilizar las premisas las veces que sean necesarias.

Para entender el proceso descrito antes, se verá un par de ejemplos más detallados.

Ejemplo

Considerar el siguiente argumento: "Si la ley no fue aprobada, entonces la constitución del país queda sin modificaciones. Si la constitución del país queda sin modificaciones no se puede elegir nuevos diputados. O se eligen nuevos diputados o el informe del presidente del país se retrasará. El informe no se retrasó un mes. Por lo que la ley fue aprobada".

Verificar su validez por la prueba formal de validez.

Solución

1. Asignar variables proposicionales.

l: La ley fue aprobada.

c: La constitución del país quedará sin modificaciones.

d: Se pueden elegir nuevos diputados.

i: El informe del presidente se retrasará un mes.

2. Realizar traducción lógica.

$\sim l \Rightarrow c$

$c \Rightarrow \sim d$

$d \vee i$

$\sim i$

$\therefore l$

3. Organizar argumento.

1. $\sim l \Rightarrow c$
2. $c \Rightarrow \sim d$
3. $d \vee i$
4. $\sim i$

$\therefore l$

4. Utilizar las reglas de inferencia y/o equivalencia.

1. $\sim l \Rightarrow c$
2. $c \Rightarrow \sim d$
3. $d \vee i$
4. $\sim i$

$\therefore l$

5. d SD 3,4
6. $\sim c$ MT 2,5
7. l MT 1,6

5. Como se llega a la conclusión, el proceso de inferencia termina.

Este proceso intenta obtener la conclusión mediante el uso de las reglas citadas antes. La premisa 5 se obtiene de las premisas 3 y 4, por un silogismo disyuntivo. En tanto, la premisa 6 se deduce de las premisas 2 y 5 por un modus tollens. Por último, la premisa 7 se obtiene de las premisas 1 y 6, también por un modus tollens.

Ya que en este punto se obtiene la conclusión, aquí termina el proceso de inferencia, lo que indica que el argumento es válido.

Ejemplo

Considerar el siguiente argumento: "Si el tiempo es agradable, entonces el cielo está despejado. Si el cielo está despejado, entonces iré de día de campo. Si el tiempo es agradable, entonces iré de día de campo implica que si el cielo está despejado entonces nadaré en el río. Si el tiempo es agradable, entonces nadaré en el río implica que me broncearé todo el cuerpo. Por tanto, me broncearé el cuerpo".

Verificar su validez por la prueba formal de validez.

Solución

1. Asignar variables proposicionales.

a: El tiempo es agradable.
d: El cielo está despejado.
c: Iré de día de campo.
n: Nadaré en el río.
b: Me broncearé el cuerpo.

2. Realizar traducción lógica.

$a \Rightarrow d$
$d \Rightarrow c$
$(a \Rightarrow c) \Rightarrow (d \Rightarrow n)$
$(a \Rightarrow n) \Rightarrow b$
$\therefore b$

3. Organizar argumento.

1. $a \Rightarrow d$
2. $d \Rightarrow c$
3. $(a \Rightarrow c) \Rightarrow (d \Rightarrow n)$
4. $(a \Rightarrow n) \Rightarrow b$

$\therefore b$

4. Utilizar las reglas de inferencia y/o equivalencia.

1.	$a \Rightarrow d$		
2.	$d \Rightarrow c$		
3.	$(a \Rightarrow c) \Rightarrow (d \Rightarrow n)$		
4.	$(a \Rightarrow n) \Rightarrow b$		
	$\therefore b$		
5.	$a \Rightarrow c$	SH	1,2
6.	$(d \Rightarrow n)$	MP	3,5
7.	$(a \Rightarrow n)$	SH	1,6
8.	b	MP	4,7

5. Como se llega a la conclusión, el proceso de inferencia termina.

La premisa 5 se obtiene de las premisas 1 y 2 por un silogismo hipotético. La premisa 6 se deduce de las premisas 3 y 5 por un modus ponens, mientras que la premisa 7 se deduce de las premisas 1 y 6, también por un silogismo hipotético. Por último, la premisa 8 se obtiene de las premisas 4 y 7 por un modus ponens.

Ya que en este punto se obtiene la conclusión, aquí termina el proceso de inferencia, lo que indica que el argumento es válido.

En ocasiones se requiere verificar la validez de un argumento, del cual ya se da su traducción lógica. En este caso se ahorran los dos primeros pasos del proceso de verificación de la validez de dicho argumento.

Ejemplo

Verificar la validez del siguiente argumento por la prueba formal de validez, dada su traducción lógica:

2. Traducción lógica.

$(\sim h \vee i) \Rightarrow (j \Rightarrow k)$
$(\sim l \wedge \sim m) \Rightarrow (k \Rightarrow n)$