ACTIVIDAD

Dadas las siguientes expresiones, representarlas con argumentos variables y determine su validez.

- x no es un numero primo, pero es un numero perfecto
- y esta a una distancia de 250 kilómetros de x
- w viaja hacia el norte si y solo si y muestra la ruta
- si w es mayor que tres y tres es mayor que z, entonces w es mayor que z.

4.5. Sintaxis de la Lógica de Predicados LPRED

En las secciones anteriores ya se han revisado como se representan los predicados, cuáles son sus posibles valores de verdad, los operadores lógicos que se pueden aplicar en este contexto y cómo se relacionan los predicados. Es por ello que posible formalizar un alfabeto y la sintaxis de esta lógica de predicados. En el Cálculo de Predicados se usan varios tipos de símbolos:

- Conjunto de elementos llamado átomos.
- Conjunto de variables: x,y,z, denotadas por las ultimas letras del alfabeto y permiten la representación de cosas, elementos o individuos que no están definidos.
- Conjunto de constantes: a,b,c, detonadas por las primeras letras del alfabeto y permiten la representación de cosas, elementos o individuos que están claramente determinados.
- Conectivas lógicas: $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$.
- Cuantificadores: $\forall, \exists$ y los cuales hacen referencia a todos o algunos elementos de un conjunto en particular.
- Símbolos de predicados: p,q,r..
- Funciones f,g,h

Con estos elementos es posible definir inicialmente el alcance de los cuantificadores. Si alguno de los cuantificadores no va seguido de un paréntesis entonces su alcance llega hasta la primera letra que se encuentra a la derecha del predicado, por ejemplo:

- $\forall_x\, p(x)$
- $\forall_x\, p(x) \rightarrow q(x) \leftrightarrow s(x))$
- $\exists_x\, p(x)\ v\ s(x))$

En las tres situaciones anteriores, el alcance solo llega hasta p(x).

Si el cuantificador antecede precede los paréntesis, su alcance abarca a toda la expresión que se encuentra entre los paréntesis, por ejemplo:

- $\forall_x\ (q(x) \leftrightarrow s(x))$
- $\exists_x\ (p(x) \rightarrow q(x) \leftrightarrow s(x))$

A aquellas variables en la cuales están bajo el alcance de algún cuantificador se les denomina ligadas y en caso contrario se les denomina libres.

Por ejemplo son variables libres:

- $p(x)$
- $p(x) \leftrightarrow q(x) \leftrightarrow s(x)$
- $q(x) \vee s(x)$

Son variables ligadas:

- $\forall_x \exists_y (q(x) \leftrightarrow s(y))$
- $\exists_y \forall_x (p(y) \rightarrow q(x) \leftrightarrow s(x))$

4.6. Cuantificador Universal

En las anteriores secciones, se trabajo con argumentos constantes y variables, de los cuales se podría determinar o no su validez de acuerdo a un contexto especifico, esta situación implica una particularización de los objetos, es por ello que se hace necesario generalizar de forma que se pueda afirmar cada cosa de un universo determinado.

Hasta ahora si tuviéramos expresiones como:

- Todos los niños del barrio
- Cualquiera de las personas puede responder
- Algunos animales son peligrosos
- Todos los países tienen producto interno bruto
- Cada persona tiene una madre natural
- Ningún camión paso la prueba mecánica
- Nadie tiene un lapicero de color rojo
- Para ningún ejecutivo el tiempo es suficiente

No fuese posible expresarla con los elementos que se han explicado, pues cada una de ellas denota una frecuencia con la cual es verdadera alguna cosa. Por lo anterior, se hace necesario incluir elementos adicionales que permitan generalizar las expresiones. Inicialmente se analizará el cuantificador Universal.

De acuerdo a [3], sea A una expresión, y sea x una variable. Si deseamos indicar que A es verdadero para todos los posibles valores de x, escribiremos $\forall_x A$. Aquí, $\forall_x$ se denomina cuantificador universal, y A se denomina ámbito (alcance) del cuantificador. Se dice que la variable x está ligada por el cuantificador. El símbolo $\forall$ se lee "para todo".

Según [2] una frase declarativa es una proposición abierta si:

1. Contiene una o más variables, y
2. no es una proposición, pero
3. se convierte en una proposición cuando las variables que aparecen en ella se reemplazan por ciertas opciones permisibles.

La variable x de cada una de las proposiciones abiertas $p(x)$ es una variable libre (de la proposición abierta). Si x varia en el universo de una proposición abierta, el valor de verdad de la proposición (que se obtiene al reemplazar cada aparición de x) puede variar.

A continuación se presentan dos tipos de cuantificadores universales que usan las frases anteriormente mencionadas.

4.6.1.Cuantificador Universal Afirmativo

Las frases que comúnmente se usan para denotar el cuantificador Universal afirmativo son:

- Todos x - Todo x
- Para cada x
- Cada x
- Cada uno x
- Siempre que x
- Cualquiera x
- Para todo x

Si se desea representar por ejemplo la expresión: "Todas las personas tienen una ilusión". Para este caso se identifica el predicado: "tienen una ilusión", entonces P(x) significa que x tiene una ilusión. La palabra "todas las personas" indica que esto se aplica para todos los x. Se formaliza:

- $\forall_x P(x)$

A continuación, se muestra una seria de formalizaciones de expresiones en las cuales se aplica el cuantificador universal afirmativo.

- Todos los Chilenos comen salmón y juegan futbol

  $\forall_x$ (Chileno(x) → comesalmon(x) ^ juegafutbol(x))

- Todos los Bogotanos son Colombianos, se puede representar:

  Para todo x, si x es Bogotano, entonces x es colombiano

  $\forall_x$ (Bogotano(x) → Colombiano(x))

- Siempre que el equipo gana o empata, todos quedan felices.

  $\forall_x$ (feliz(x) → equipogana(x) v equipoempata(x))

También es necesario distinguir cuando al cuantificador universal es negativo, a continuación, se muestra esta situación.

4.6.2.Cuantificador Universal Negativo

Las frases que comúnmente se usan para denotar el cuantificador Universal negativo son:

- Para ningún x
- Ninguno
- No

- Nadie
- Nada

Si por ejemplo se desea representar la expresión: "ningún empleado público es menor de edad", En este caso "ningún empleado público" hace referencia a todo un universo de todos los empleados y el predicado es "es menor de edad" y por lo tanto se usa para expresar una negación

La anterior expresión se puede modificar de la siguiente manera:

- Para todo y, si y es empleado público, entonces y no es menor de edad.

$$\forall_x \, (Ex \rightarrow \neg Mx)$$

También los argumentos pueden estar seguidos de los predicados sin necesidad de paréntesis. Pero para efectos de este libro, utilizaremos los paréntesis.

A continuación, se muestra una seria de formalizaciones de expresiones en las cuales se aplica el cuantificador universal negativo.

- Para todo x, x no es empresario.

$$\forall_x \, (\neg \text{empresario}(x))$$

- Nadie ganó el parcial de lenguaje de programación.

$$\forall_x \, (\neg \text{gano}(x))$$

- Para ningún cantante es importante la fama o el dinero.

$$\forall_x \, (\text{cantante}(x) \rightarrow \text{fama}(x) \text{ v } \text{dinero } (x))$$

ACTIVIDAD

Dadas las siguientes expresiones, representarlas con cuantificadores universales afirmativos o negativos, según sea el caso:

- Nadie de la familia es profesional
- Todos en la academia han viajado tanto a Ecuador como a Panamá
- Ninguno de los visitantes conocía el zoológico.
- Nada es absolutamente caliente.
- Todas las cosas se componente de materia orgánica o inorgánica.
- Todos los niños juegan con Mirus
- Cualquiera de los estudiantes o puede realizar la pasantía o su trabajo de investigación.
- Siempre que se viaja o se enferma o se pone de mal humor.

4.7. Cuantificador Existencial

Es otro tipo de cuantificador dentro del cálculo de predicados, el cual indica que algún o algunos valores son verdaderos dentro de un dominio o contexto específico.

De acuerdo a [3], sea A una expresión, y sea x una variable. Si deseamos indicar que A es verdadero para cuando menos un valor de x, escribiremos $\exists_x A$. Esta frase se lee "existe un x tal que A". Aquí, $\exists_x A$ se denomina cuantificador existencial, y se dice que A es el ámbito (alcance) del cuantificador existencial. Se dice que la variable x está ligada por el cuantificador. El símbolo $\forall$ se lee "existe al menos".

Algunas de las frases con la que se identifica generalmente este cuantificador son:

- Existe al menos un x
- Para algún x
- Para algunos x
- Existe un x tal que
- Algunos x
- Cuando menos un x

Por ejemplo la expresión "para algún x P(x)", se puede representar de la siguiente manera:

"para algún x P(x)", entonces $\exists_x p(x)$

Por ejemplo si se quiere representar la expresión: "Existe al menos un mexicano que escribe poemas y es político", se puede formalizar de la siguiente manera:

$$\exists_x (\text{Mexicano}(x) \rightarrow \text{escribepoema}(x) \wedge \text{politico}(x))$$

Por ejemplo si se desea representar la expresión: "Algunos estudiantes son deportistas", se podría reestructurar y representar de la siguiente manera:

"Existe por lo menos un x tal que, x es universitario y x es deportista".

$$\exists_x (\text{Universitario}(x) \wedge \text{deportista}(x))$$

A los anteriores casos se les denomina representaciones existenciales afirmativas, pero también se tienen expresiones existencias negativas como por ejemplo: "Algunos profesores no tienen Doctorado". Se puede representar de la siguiente manera:

"Existe por lo menos un x tal que, x es profesor y x no tiene Doctorado".

$$\exists_x (\text{profesor}(x) \wedge \neg\text{doctorado}(x))$$

En la siguiente sección de este libro, se determinarán una serie de reglas de equivalencia entre cuantificadores universales y existenciales.

ACTIVIDAD

Dadas las siguientes expresiones, representarlas con cuantificadores existenciales afirmativos o negativos, según sea el caso:

- Existe al menos un Ingeniero o un veterinario en la familia.
- Algunos pájaros cantan en la madrugada y de noche
- Para algunos campesinos el invierno no es un problema.
- Cuando menos un Español es hincha del Zaragoza.
- Algunos niños juegan con el gato, a pesar de ser peligroso.

4.8. Equivalencias entre cuantificadores

En las anteriores secciones se mostró que las proposiciones que son cuantificadas (universales o existenciales) pueden ser tanto afirmativas como negativas. Se pueden representar entre otras las siguientes:

Proposición	Fórmula
Para todo x es	$\forall_x\ p(x)$
Ningún x es	$\forall_x \neg p(x)$
Algún x es	$\exists_x\ p(x)$
Algún x no es	$\exists_x \neg p(x)$

Se sabe que la verdad de una de ellas se sigue la falsedad de su contradictoria. Si se niega cualquiera de ellas se obtiene una equivalencia [13]. Cuando se intercambian cuantificadores también se cambia el cuantificador y su signo.

Proposición	Fórmula equivalente
$\forall_x\ p(x)$	$\neg\exists_x \neg p(x)$
$\forall_x \neg p(x)$	$\neg\exists_x\ p(x)$
$\exists_x\ p(x)$	$\neg\forall_x \neg p(x)$
$\exists_x \neg p(x)$	$\neg\forall_x\ p(x)$

Por ejemplo si se tienen las expresiones:

- Todos son hombres equivale a decir es falso que algunos no sean hombres.
- Ninguno es hombre equivale a decir es falso que algunos sean hombres
- Algunos son hombres equivale a decir es falso que ninguno sea hombre
- Algunos nos son hombres equivale a decir es falso que todos sean hombres.

Existen otros tipos de equivalencias llamadas de oposición aristotélica, a continuación se muestran las equivalencias.

Proposición	Fórmula equivalente
$\forall_x\ (p(x) \rightarrow q(x))$	$\neg\exists_x\ (p(x)\ \wedge\ \neg q(x))$
$\forall_x\ (p(x) \rightarrow \neg q(x))$	$\neg\exists_x\ (p(x)\ \wedge\ q(x))$
$\exists_x\ (p(x)\ \wedge\ q(x))$	$\neg\forall_x\ (p(x) \rightarrow \neg q(x))$
$\exists_x\ (p(x)\ \wedge\ \neg q(x))$	$\neg\forall_x\ (p(x) \rightarrow q(x))$

Si se quiere verificar la validez de la equivalencia entre:

$$\forall_x\ (p(x) \rightarrow q(x))\ \text{y}\ \neg\exists_x\ (p(x)\ \wedge\ \neg q(x))$$

Se pueden aplicar los siguientes pasos:

1. $\forall_x\ (p(x) \rightarrow q(x))$
2. $\neg\exists_x \neg(p(x) \rightarrow q(x))$
3. $\neg\exists_x \neg(\neg p(x)\ v\ q(x))$
4. $\neg\exists_x\ (p(x)\ \wedge\ \neg q(x))$

Ambas fórmulas entonces son lógicamente equivalentes y conservan su propiedad de validez.

Otras equivalencias lógicas que se usan en el cálculo de predicados son las siguientes:

Proposición	Fórmula equivalente
$\forall_x\ \neg\neg(p(x))$	$\forall_x\ \neg\neg(p(x))$
$\forall_x\ \neg\ (p(x)\ \wedge\ q(x))$	$\forall_x\ (\neg p(x)\ v\ \neg q(x))$
$\forall_x\ \neg\ (p(x)\ v\ q(x))$	$\forall_x\ (\neg p(x)\ \wedge\ \neg q(x))$

ACTIVIDAD

Exprese las siguientes expresiones en lenguaje natural, de forma que se apliquen las equivalencias explicadas en esta sección.

- Ninguno es egresado de odontología
- Todos son profesionales
- Algunos tienen cedula de ciudadanía

Verifique que las siguientes proposiciones son equivalentes:

- $\forall_x\ (p(x) \rightarrow \neg q(x)) \Leftrightarrow \neg\exists_x\ (p(x)\ \wedge\ q(x))$
- $\exists_x\ (p(x)\ \wedge\ q(x)) \Leftrightarrow \neg\forall_x\ (p(x) \rightarrow \neg q(x))$

Con los elementos conceptuales de este capítulo, se considera que es posible que el estudiante pueda trabajar con los temas fundamentales de la programación lógica.