1.4 Inferencia Lógica

En la Sección anterior reconocimos al Álgebra de Proposiciones como un conjunto de herramientas que nos permiten verificar equivalencias lógicas sin tener que recurrir a las Tablas de Verdad. Sin embargo, estas herramientas están cimentadas, entiéndase demostradas, precisamente por el método basado en Tablas de Verdad. La ventaja en el uso del Álgebra Proposicional radica por un lado en que nos permite obtener demostraciones más concisas y por otro lado nos permite abordar casos en los cuales se consideran un número elevado de proposiciones, una situación que si bien es factible de ser atacada por las Tablas de Verdad, hemos visto que en la práctica no es recomendable.

Hasta este punto hemos demostrado Teoremas de la forma $p \equiv q$. Se parte ya sea de p (o de q), se manipulan las expresiones y se llega entonces a q (o a p). Este tipo de enunciados nos presentan desde un principio el objetivo que debemos alcanzar. Pero en la práctica es común que contemos con una serie de proposiciones unidas mediante ciertos conectivos y deseamos saber que nueva información podemos obtener a partir de éstas. Por ejemplo, supongamos que las proposiciones G, E, K, L, M y B contienen afirmaciones referentes a propiedades de nuestro Universo. Y tenemos además que éstas se conjuntan en una sola proposición compuesta:

$$(\neg G \Rightarrow E) \wedge (E \Rightarrow K) \wedge \neg G \wedge (K \Rightarrow \neg L) \wedge (\neg L \Rightarrow M) \wedge (M \Rightarrow B)$$

La pregunta ahora es: ¿qué nueva información podemos obtener a partir de la proposición anterior? O en otros términos, ¿qué podemos **Inferir** a partir de tal proposición compuesta? La buena noticia es que algunos Teoremas que hemos probado en la Sección anterior nos servirán como modelos de Inferencia, o mejor dicho, **Reglas de Inferencia**. Toda Regla de Inferencia se dividirá en dos partes: 1) un conjunto de **Premisas** y 2) una **Conclusión**. Para aplicarla se deberá verificar primeramente que las proposiciones a considerar se ajusten perfectamente a la manera en la cual las premisas están especificadas. Si es el caso, entonces simplemente se observa la forma de la conclusión y se utilizan aquellas premisas adecuadas para ajustarla debidamente. Como veremos más adelante una Regla de Inferencia no es más que una Condicional $p \Rightarrow q$ en la que la conclusión forma el consecuente q mientras que las premisas son proposiciones conectadas mediante conjunciones y con ello se forma el antecedente p. Ello quiere decir que $p = p_1 \wedge p_2 \wedge \ldots \wedge p_m$, donde $p_1, p_2, \ldots, p_m$ son las premisas en consideración. Nótese que si una de las premisas es falsa entonces por las propiedades de la conjunción se tiene que p será también falsa. En consecuencia, por las propiedades de la Condicional, tendremos que $p \Rightarrow q \equiv \mathrm{F}$. Ello quiere decir que para generar inferencias válidas se deben considerar siempre Premisas verdaderas. Ahora bien, formalmente diremos que una proposición de la forma $p_1 \wedge p_2 \wedge \ldots \wedge p_m \Rightarrow q$ es una Regla de Inferencia si y sólo si $p_1 \wedge p_2 \wedge \ldots \wedge p_m \Rightarrow q$ es una Tautología, i.e. $p_1 \wedge p_2 \wedge \ldots \wedge p_m \Rightarrow q \equiv \mathrm{V}$.

En el párrafo anterior mencionábamos que las premisas deben ser verdaderas para que la conclusión sea verdadera. Sin embargo, sabemos que lógicamente una proposición puede ser verdadera o falsa. Este puede verse con facilidad en la Tabla de Verdad de una Regla de Inferencia. En realidad la validez de una inferencia no depende de un estado particular en su Tabla de Verdad o de lo que afirmen sus premisas, sino de la forma que tenga la Regla de Inferencia en consideración. Mencionábamos previamente que para aplicar una Regla de Inferencia se deberá verificar primeramente que las proposiciones a considerar se ajusten perfectamente a la manera en la cual las premisas están especificadas: a ello nos referimos cuando relacionamos a la validez de una inferencia con la forma que tenga su correspondiente Regla de Inferencia. La existencia de premisas falsas de ninguna manera impide que una Regla de Inferencia pueda ser aplicada, pero es claro que la conclusión que se obtenga será definitivamente errónea. A final de cuentas, una Regla de Inferencia $p_1 \wedge p_2 \wedge \ldots \wedge p_m \Rightarrow q$ debe ser una Tautología para caracterizarse como tal y debe ser vista como una "Regla de Sustitución".

A continuación describiremos algunas Reglas de Inferencia. Éstas en un principio fueron ya presentadas en la Sección anterior como proposiciones lógicamente equivalentes a V, es decir, son Tautologías.

- El **Teorema 1.19** establece que $((p \Rightarrow q) \wedge p) \Rightarrow q \equiv$ V:

Modus Ponens:

Premisa 1: $p \Rightarrow q$
Premisa 2: p
Conclusión: q

- Por el **Teorema 1.20** tenemos que $((p \Rightarrow q) \wedge \neg q) \Rightarrow \neg p \equiv$ V:

Modus Tollens:

Premisa 1: $p \Rightarrow q$
Premisa 2: $\neg q$
Conclusión: $\neg p$

- El **Teorema 1.21** nos dice que $(p \wedge q) \Rightarrow (p \wedge q) \equiv$ V:

Regla de Adjunción:

Premisa 1: p
Premisa 2: q
Conclusión: $p \wedge q$

- El **Teorema 1.22** establece que $(p \wedge q) \Rightarrow p \equiv \text{V}$ y que $(p \wedge q) \Rightarrow q \equiv \text{V}$:

Reglas de Simplificación:

Premisa 1: $p \wedge q$	Premisa 1: $p \wedge q$
Conclusión: p	Conclusión q

- Por el **Teorema 1.23** tenemos que $((p \vee q) \wedge \neg p) \Rightarrow q \equiv \text{V}$ y $((p \vee q) \wedge \neg q) \Rightarrow p \equiv \text{V}$:

Modus Tollendo Ponens:

Premisa 1: $p \vee q$	Premisa 1: $p \vee q$
Premisa 2: $\neg p$	Premisa 2: $\neg q$
Conclusión: q	Conclusión p

- El **Teorema 1.24** nos dice que $((p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)) \Rightarrow (p \Rightarrow r) \equiv \text{V}$:

Ley del Silogismo Hipotético:

Premisa 1: $p \Rightarrow q$
Premisa 2: $q \Rightarrow r$
Conclusión: $p \Rightarrow r$

- El **Teorema 1.25** establece que $p \Rightarrow (p \vee q) \equiv \text{V}$ y que $q \Rightarrow (p \vee q) \equiv \text{V}$:

Reglas de Adición:

Premisa 1: p	Premisa 1: q
Conclusión: $p \vee q$	Conclusión: $p \vee q$

Ahora aplicaremos las reglas anteriores a fin de hacer inferencias sobre algunas premisas. Por lo regular al aplicar reglas de inferencia simplemente se listan y enumeran las premisas sobreentendiendo que éstas se encuentran conectadas mediante conjunciones. La idea es poder identificar rápidamente que premisas se utilizarán. Al aplicar una Regla de Inferencia se debe mencionar la regla aplicada y las premisas involucradas.

Ejemplo:

- Sean las proposiciones:
  - p: Juan está en el partido de Basketball.
  - q: Juan está en la cancha.
- Las proposiciones p y q darán lugar a las siguientes premisas:
  - Si Juan está en el partido de Basketball entonces Juan está en la cancha.

    Premisa 1: $p \Rightarrow q$
  - Juan está en la cancha.

    Premisa 2: p
- Tenemos entonces:

Premisa 1: $p \Rightarrow q$
Premisa 2: p
Conclusión: q (*Modus Ponens* Premisas 1y 2)

- Es decir, mediante la regla *Modus Ponens* concluimos que "Juan está en la cancha".

Ejemplo:

- Proposiciones:
  - p: El clima está helado.
  - q: El lago se helará.
- Premisas:
  - Si el clima **no** está helado entonces el lago **no** se helará.

    Premisa 1: $\neg p \Rightarrow \neg q$
  - El clima **no** está helado.

    Premisa 2: $\neg p$
- Inferencias:

  Premisa 1: $\neg p \Rightarrow \neg q$
  Premisa 2: $\neg p$
  Conclusión: $\neg q$ (*Modus Ponens* Premisas 1 y 2)

- Se ha concluido entonces que "El lago no se helará".

Ejemplo: A partir del siguiente conjunto de premisas concluir la proposición r.

Premisa 1:	$(s \wedge u) \Rightarrow \neg t$	
Premisa 2:	$(s \wedge u)$	
Premisa 3:	$\neg t \Rightarrow r$	
Conclusión/Premisa 4:	$\neg t$	(*Modus Ponens* Premisas 1 y 2)
Conclusión:	r	(*Modus Ponens* Premisas 3 y 4)

El ejemplo anterior nos pone de muestra que una proposición que resulte de la aplicación de una Regla de Inferencia, tal como sucedió con la aplicación del *Modus Ponens* sobre las premisas 1 y 2, también puede ser utilizada como una nueva Premisa que permita la aplicación de otra regla de inferencia si es que se requiere. En nuestro caso en cuestión la nueva premisa 4 fue fundamental para aplicar nuevamente el *Modus Ponens* y entonces obtener la conclusión deseada r.

Ejemplo:

- Proposiciones:
    - p: El objeto astral tiene luz propia.
    - q: El objeto astral es una estrella.
- Premisas:
    - Si el objeto astral tiene luz propia entonces el objeto astral es una estrella.

      Premisa 1: $p \Rightarrow q$
    - El objeto astral **no** es una estrella.

      Premisa 2: $\neg q$
- Inferencias:

  Premisa 1: $p \Rightarrow q$
  Premisa 2: $\neg q$
  Conclusión: $\neg p$ (*Modus Tollens* Premisas 1 y 2)
- Se ha concluido entonces que "El objeto astral no tiene luz propia".

∎

Ejemplo: Dadas las siguientes premisas concluir $\neg(\neg r)$.

Premisa 1:	$p \Rightarrow q$	
Premisa 2:	$\neg q$	
Premisa 3:	$\neg p \Rightarrow r$	
Conclusión/Premisa 4:	$\neg p$	(*Modus Tollens* Premisas 1 y 2)
Conclusión/Premisa 5:	r	(*Modus Ponens* Premisas 3 y 4)
Conclusión:	$\neg(\neg r)$	(Propiedad de la Doble Negación, Premisa 5)

∎

Nuestro ejemplo anterior nos ha ilustrado en el sentido de que para llegar a una conclusión final por un lado pueden aplicarse diferentes reglas de inferencia, en este caso se utilizó primeramente un *Modus Tollens* y posteriormente un *Modus Ponens*. Por otro lado, también nos hace ver con claridad que es totalmente válido recurrir a nuestras propiedades del Álgebra de Proposiciones: se aplicó a la Premisa 5 la propiedad de Idempotencia de la Negación para obtener la conclusión deseada $\neg(\neg r)$. En realidad no debe sorprendernos ya que sabemos con anterioridad que para tal propiedad se tiene que $r \equiv \neg(\neg r)$.

Ejemplo: Para el siguiente par de premisas concluir a.

Premisa 1:	$\neg a \Rightarrow \neg((b \wedge c) \vee (b \wedge d))$	
Premisa 2:	$b \wedge (c \vee d)$	
Conclusión/Premisa 3:	$(b \wedge c) \vee (b \wedge d)$	(Propiedad Distributiva sobre la Premisa 2)
Conclusión/Premisa 4:	$\neg(\neg(b \wedge c) \vee (b \wedge d))$	(Propiedad de la Doble Negación, Premisa 3)
Conclusión/Premisa 5:	$\neg(\neg a)$	(*Modus Tollens* Premisas 1 y 4)
Conclusión:	a	(Propiedad de la Doble Negación, Premisa 5)

■

Ejemplo:

- Proposiciones:
  - p: Jorge es adulto.
  - q: María es adolescente.
- Premisas:
  - Jorge es adulto.

    Premisa 1: p
  - María es adolescente.

    Premisa 2: q
- Inferencias:

  Premisa 1: p

  Premisa 2: q

  Conclusión: $p \wedge q$ (Regla de Adjunción Premisas 1 y 2)
- Se ha concluido entonces que "Jorge es adulto y María es adolescente".

■

Ejemplo: Para el siguiente conjunto de premisas concluir $(r \vee s) \wedge \neg f$.

Premisa 1:	$c \vee d$	
Premisa 2:	$(c \vee d) \Rightarrow \neg f$	
Premisa 3:	$\neg f \Rightarrow (a \wedge \neg b)$	
Premisa 4:	$(a \wedge \neg b) \Rightarrow (r \vee s)$	
Conclusión/Premisa 5:	$\neg f$	(*Modus Ponens* Premisas 1 y 2)
Conclusión/Premisa 6:	$a \wedge \neg b$	(*Modus Ponens* Premisas 3 y 5)
Conclusión/Premisa 7:	$r \vee s$	(*Modus Ponens* Premisas 4 y 6)
Conclusión:	$(r \vee s) \wedge \neg f$	(Regla de Adjunción Premisas 5 y 7)

Ejemplo:

- Proposiciones:
  - p: Jorge es adulto.
  - q: María es adolescente.
- Premisas:
  - Jorge es adulto y María es adolescente.

Premisa 1: $p \wedge q$

- Por la aplicación de la Regla de Simplificación se pueden presentar dos posibles inferencias:

Premisa 1: $p \wedge q$	Premisa 1: $p \wedge q$
Conclusión: p	Conclusión: q

Ejemplo: Para el siguiente par de premisas concluir $a \wedge c$.

Premisa 1:	$a \wedge \neg b$	
Premisa 2:	$\neg c \Rightarrow b$	
Conclusión/Premisa 3:	$\neg b$	(Regla de Simplificación Premisa 1)
Conclusión/Premisa 4:	$\neg(\neg c)$	(*Modus Tollens* Premisas 2 y 3)
Conclusión/Premisa 5:	c	(Propiedad de la Doble Negación sobre Premisa 4)
Conclusión/Premisa 6:	a	(Regla de Simplificación Premisa 1)
Conclusión:	$a \wedge c$	(Regla de Adjunción Premisas 5 y 6)

Ejemplo: Concluir $\neg s$ con la premisas dadas.

Premisa 1:	$(s \vee g) \Rightarrow p$	
Premisa 2:	$\neg a$	
Premisa 3:	$p \Rightarrow a$	
Conclusión/Premisa 4:	$\neg p$	(*Modus Tollens* Premisas 2 y 3)
Conclusión/Premisa 5:	$\neg(s \vee g)$	(*Modus Tollens* Premisas 1 y 4)
Conclusión/Premisa 6:	$\neg s \wedge \neg g$	(Ley de D'Morgan sobre la Premisa 5)
Conclusión:	$\neg s$	(Regla de Simplificación Premisa 6)

■

Ejemplo:

- Proposiciones:
  - o p: La sustancia contiene hidrógeno.
  - o q: La sustancia contiene oxígeno.
- Premisas:
  - o La sustancia contiene hidrógeno o la sustancia contiene oxígeno.

    Premisa 1: $p \vee q$
  - o La sustancia **no** contiene hidrógeno.

    Premisa 2: $\neg p$
- Inferencias:

  Premisa 1: $p \vee q$

  Premisa 2: $\neg p$

  Conclusión: q (*Modus Tollendo Ponens* Premisas 1 y 2)
- Se ha concluido entonces que "La sustancia contiene oxígeno".

■

Ejemplo: Concluir p con la premisas dadas.

Premisa 1:	$t \Rightarrow (p \vee q)$	
Premisa 2:	$\neg(\neg t)$	
Premisa 3:	$\neg q$	
Conclusión/Premisa 4:	t	(Propiedad de la Doble Negación sobre Premisa 2)
Conclusión/Premisa 5:	$p \vee q$	(*Modus Ponens* Premisas 1 y 4)
Conclusión:	p	(*Modus Tollendo Ponens* Premisas 3 y 5)

■

Ejemplo: concluir r con las premisas dadas.

Premisa 1:	$\neg q \vee s$	
Premisa 2:	$\neg s$	
Premisa 3:	$\neg(r \wedge s) \Rightarrow q$	
Conclusión/Premisa 4:	$\neg q$	(*Modus Tollendo Ponens* Premisas 1 y 2)
Conclusión/Premisa 5:	$\neg(\neg(r \wedge s))$	(*Modus Tollens* Premisas 3 y 4)
Conclusión/Premisa 6:	$r \wedge s$	(Propiedad de la Doble Negación sobre Premisa 5)
Conclusión:	r	(Regla de Simplificación sobre Premisa 6)

■

Ejemplo:

- Proposiciones:
  - o p: Está lloviendo.
  - o q: El cielo está nublado.
  - o r: El clima está helado.
- Premisas:
  - o Si está lloviendo entonces el cielo está nublado.

    Premisa 1: $p \Rightarrow q$
  - o Si el cielo está nublado entonces el clima está helado.

    Premisa 2: $q \Rightarrow r$
- Inferencias:

  Premisa 1: $p \Rightarrow q$

  Premisa 2: $q \Rightarrow r$

  Conclusión: $p \Rightarrow r$ (*Ley del Silogismo Hipotético* Premisas 1 y 2)
- Se ha concluido entonces que “Si está lloviendo entonces el clima está helado”.

■

Ejemplo: concluir $\neg r \vee \neg n$ con las premisas dadas.

Premisa 1:	$r \Rightarrow \neg s$	
Premisa 2:	$\neg s \Rightarrow q$	
Premisa 3:	$q \Rightarrow \neg n$	
Conclusión/Premisa 4:	$r \Rightarrow q$	(Ley del Silogismo Hipotético Premisas 1 y 2)
Conclusión/Premisa 5:	$r \Rightarrow \neg n$	(Ley del Silogismo Hipotético Premisas 3 y 4)
Conclusión:	$\neg r \vee \neg n$	(Propiedad del Condicional Premisa 5)

■

Ejemplo: concluir $\neg g \Rightarrow b$ con las premisas dadas.

Premisa 1:	$\neg g \Rightarrow e$	
Premisa 2:	$e \Rightarrow k$	
Premisa 3:	$k \Rightarrow \neg l$	
Premisa 4:	$\neg l \Rightarrow m$	
Premisa 5:	$m \Rightarrow b$	
Conclusión/Premisa 6:	$\neg g \Rightarrow k$	(Ley del Silogismo Hipotético Premisas 1 y 2)
Conclusión/Premisa 7:	$\neg g \Rightarrow \neg l$	(Ley del Silogismo Hipotético Premisas 3 y 6)
Conclusión/Premisa 8:	$\neg g \Rightarrow m$	(Ley del Silogismo Hipotético Premisas 4 y 7)
Conclusión	$\neg g \Rightarrow b$	(Ley del Silogismo Hipotético Premisas 5 y 8)

1.5 Cuantificadores

Hasta ahora se han considerado proposiciones de las que se sabe o asume su valor de verdad o falsedad. Sin embargo, en ocasiones se requiere considerar expresiones llamadas **Proposiciones Abiertas** cuyo valor de verdad o falsedad depende de una sustitución. Por ejemplo, considérese a la siguiente proposición:

x estudia Ingeniería en Computación

A esta proposición, y tal como hemos hecho antes, se le puede asignar una letra para denotarla. Por ejemplo, usemos la letra p. Pero dado que p requiere de un valor específico para x a fin de poder ser evaluada, entonces indicaremos que la proposición requiere se le pase un valor de entrada x. De tal forma que tenemos ahora:

$p(x)$: *x estudia Ingeniería en Computación*

A x se le llama **Variable Individual**. El valor de $p(x)$ depende de qué o quién sea x. Los valores específicos que puede tomar una variable individual son llamados **Constantes Individuales**. Tenemos entonces que una Proposición Abierta es una expresión la cual se convierte en una proposición cuando sus variables individuales se sustituyen por constantes individuales. Por ejemplo, retomando nuestro ejemplo $p(x)$: *x estudia Ingeniería en Computación*, asumamos que x puede tomar el valor Juan o el valor Edna. Sin embargo nosotros sabemos de antemano que Juan efectivamente estudia Ingeniería en Computación y que por otro lado Edna estudia Medicina, entonces tendremos las proposiciones y sus correspondientes valores:

- *p*(*Juan*): *Juan estudia Ingeniería en Computación* (V)
- *p*(*Edna*): *Edna estudia Ingeniería en Computación* (F)