2. ELEMENTOS DE LÓGICA PROPOSICIONAL

2.1. PROPOSICIONES

Definición 2.1.1.-

*Se denomina **proposición** a toda expresión verbal, enunciado o discurso del cual podemos afirmar, inequívocamente, que es verdadero o falso, pero no ambas cosas a la vez. Las proposiciones se simbolizan mediante letras minúsculas, normalmente desde la **p** en adelante, llamadas **letras proposicionales**.*

Ejemplo 2.1.1.- Serían proposiciones "hoy es domingo" y "estamos comiendo". No lo serían, en cambio, "¿quién es?" y "sal de aquí".

Definición 2.1.2.-

*A cada proposición pueden asignársele dos valores lógicos: "es verdadera" o "es falsa", que reciben el nombre de **valores de verdad**. Dichos valores se representan, respectivamente, por las letras **V** (ó **1**) y **F** (ó **0**).*

Ejemplo 2.1.2.-

a) La proposición "15 es múltiplo de 3" es verdadera y adquiere el valor V ó 1.
b) La proposición "París es la capital de Italia" es falsa y toma el valor F ó 0.

2.2. TIPOS DE PROPOSICIONES

Existen dos tipos de proposiciones:

a) **Atómicas o simples.-** Son aquellas que no contienen conjunciones o términos de enlace.
b) **Moleculares o compuestas.-** Son las formadas por proposiciones atómicas relacionadas a través de conjunciones o términos de enlace.

Ejemplo 2.2.1.- Serían proposiciones atómicas:

1) El número 7 es primo.
2) Inés tiene 27 años.

Ejemplo 2.2.2.- Como casos de proposiciones moleculares podríamos señalar las siguientes:

1) Luis está en casa y estudiando.
2) Está nublado o hace sol.

NOTA 2.2.1.- Otra clasificación usada es la que las divide en función del número de proposiciones atómicas que las constituyen, resultando así de orden uno, de orden dos, etc.

2.3. NEXOS LÓGICOS Y FÓRMULAS LÓGICAS

En el apartado anterior hemos hablado de los términos de enlace. Dichos términos nos permiten, a partir de proposiciones simples, obtener otras simples o compuestas. Ello nos conduce a la:

Definición 2.3.1.-

*Las partes de un enunciado o discurso aparecen unidas o relacionadas mediante palabras como "si", "entonces", "o", "y", "no", "algunos", "todos", "cada", etc. Estas palabras se llaman **nexos lógicos**, **términos de enlace** o **partículas conectivas** y componen la estructura lógica del lenguaje.*

La **lógica proposicional** utiliza distintos términos de enlace que se hallan recogidos en la tabla 0, siendo p y q dos proposiciones cualesquiera:

Tabla 0

NEXO LÓGICO	SÍMBOLO	SIGNIFICADO
Negación	$\neg$ ó $-$	no o no es cierto que p
Conjunción	$\wedge$	p y q
Disyunción inclusiva	$\vee$	p o q o ambas
Condicional	$\rightarrow$	si p, entonces q
Bicondicional	$\leftrightarrow$	si y sólo si p, entonces q
Disyunción exclusiva	$\not\leftrightarrow$ ó $\underline{\vee}$	p o q, pero no ambas

Definición 2.3.2.-

*Las expresiones en las que figuran letras proposicionales y nexos lógicos reciben el nombre de **fórmulas lógicas** o **esquemas proposicionales**. Cuando en una fórmula lógica se sustituyen las letras por proposiciones dadas, resulta una determinada proposición cuyo valor de verdad depende de los valores de verdad de dichas proposiciones.*

Ejemplo 2.3.1.-

a) Si designamos por p la proposición "llueve" y con q la proposición "el canario no canta", la proposición "si llueve entonces el canario no canta" se simboliza a través de la fórmula lógica $p \rightarrow q$.
b) Si p es la proposición "Luis es matemático" y q la proposición "María es abogada", la proposición "Luis es matemático y María es abogada" se escribe con la fórmula lógica $p \wedge q$.
c) La proposición "Luis no es matemático" se representaría por los símbolos $\overline{p}$ ó $\neg p$.

Las fórmulas lógicas se denominan con los mismos términos que sus nexos correspondientes, es decir, **negación**, **conjunción**, **disyunción inclusiva**, **condicional**, **bicondicional** y **disyunción exclusiva**. Relacionando dos fórmulas lógicas mediante una partícula conectiva se obtiene otra fórmula lógica, que denotará una determinada proposición. Las dos fórmulas lógicas, vinculadas por la partícula conectiva para dar lugar a otra fórmula lógica, se escriben entre paréntesis. Esto es necesario para precisar a qué proposiciones afectan cada uno de los nexos lógicos.

Ejemplo 2.3.2.- Si p, q y r son tres proposiciones, la expresión $p \rightarrow q \rightarrow r$ carece de sentido, pues puede interpretarse como $(p \rightarrow q) \rightarrow r$, o también como $p \rightarrow (q \rightarrow r)$, y ambas fórmulas lógicas poseen, de manera evidente, distinto significado.

Ejemplo 2.3.3.- La fórmula $(p \rightarrow q) \wedge (q \leftrightarrow r)$ es la conjunción de la condicional $p \rightarrow q$ y de la bicondicional $q \leftrightarrow r$.

NOTA 2.3.1.- En la fórmula lógica $p \rightarrow q$, la proposición p se llama **antecedente** de la condicional y la proposición q recibe el nombre de **consecuente** de dicha condicional.

En una fórmula lógica, las letras proposicionales se consideran variables que pueden tomar los valores de verdad V o F. Según los valores de verdad de dichas letras, la fórmula lógica adquiere el valor V o F siguiendo unos axiomas que estableceremos posteriormente.

Definición 2.3.3.-

*El **álgebra de proposiciones** se aplica a la construcción de fórmulas lógicas y al estudio de sus propiedades.*

2.4. TABLAS DE VERDAD

Para el desarrollo del álgebra de proposiciones establecemos un conjunto de axiomas. Estos axiomas expresan las propiedades que hemos atribuido a las proposiciones y a las fórmulas lógicas que las definen.

Axioma 1.-

Toda proposición representada por una fórmula lógica es verdadera o falsa, es decir, toma el valor V o el valor F.

Axioma 2.-

Las fórmulas lógicas enunciadas simbolizan proposiciones verdaderas o falsas, cuyos valores de verdad o falsedad dependen de los valores de verdad o falsedad de las proposiciones que intervienen en dichas fórmulas.

Axioma 3.-

Si p y q son dos proposiciones cualesquiera, los valores de verdad o falsedad de sus fórmulas lógicas vienen determinados por las siguientes tablas, llamadas habitualmente ***tablas de verdad****:*

1ª) Negación.-

Tabla I	
p	**$\neg$p**
V	F
F	V

La negación de la proposición p es la proposición $\neg$p ó $\overline{p}$, que se lee "no p". Como vemos, si una proposición p es verdadera, su negación es falsa, y viceversa.

Ejemplo 2.4.1.- La negación de la proposición p: "el gato está en la ventana" es la proposición $\overline{p}$: "el gato no está en la ventana", atendiendo así a su construcción gramatical correcta (estrictamente sería $\overline{p}$: "no el gato está en la ventana").

NOTA 2.4.1.- La negación de una proposición no es una proposición molecular de orden dos, puesto que no está formada por dos proposiciones atómicas; pero, en sentido estricto, tampoco es una proposición simple, pues en ella interviene un nexo lógico.

2ª) Conjunción.-

Tabla II		
p	**q**	**p $\wedge$ q**
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

La conjunción de las proposiciones p y q es la proposición p $\wedge$ q, que se lee "p y q". Según observamos en la tabla, la conjunción de dos proposiciones sólo es verdadera cuando lo son las dos proposiciones componentes, resultando falsa en el resto de los casos (alguna o las dos falsas).

Ejemplo 2.4.2.- La conjunción de las proposiciones p: "llueve" y q: "hay ruido en la calle" es la proposición p $\wedge$ q: "llueve y hay ruido en la calle". Se infiere de manera inmediata que únicamente será verdadero este enunciado si lo son las dos proposiciones simples; para verlo basta con construir cualquiera de los otros.

3ª) Disyunción inclusiva.-

Tabla III		
p	**q**	**p $\vee$ q**
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

La disyunción inclusiva (o simplemente disyunción) de las proposiciones p y q es la proposición p $\vee$ q, que se lee "p o q, o ambas". La disyunción de dos proposiciones es verdadera cuando una o las dos proposiciones componentes son verdaderas, resultando falsa sólo en el caso de que las dos proposiciones simples sean falsas.

Ejemplo 2.4.3.- La disyunción de las proposiciones p: "Luis estudia" y q: "Luis escucha música" es la proposición p $\vee$ q: "Luis estudia o escucha música", considerando la disyunción en un sentido global. Esto quiere decir que Luis puede estar estudiando o escuchando música o haciendo ambas cosas a la vez, pues la disyunción no es excluyente.

4ª) Condicional.-

Tabla IV		
p	**q**	**p $\rightarrow$ q**
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

La condicional de las proposiciones p y q es la proposición p $\rightarrow$ q, que se lee "si p, entonces q". La condicional de dos proposiciones es verdadera cuando el antecedente y el consecuente son verdaderos o cuando el antecedente es falso y el consecuente verdadero o falso, apareciendo falsa sólo en el caso de que el antecedente sea verdadero y el consecuente falso.

Ejemplo 2.4.4.-

a) La condicional de las proposiciones p: "el hierro es un metal" y q: "Madrid es la capital de España" es la proposición p $\rightarrow$ q: "si el hierro es un metal, entonces Madrid es la capital de España". Esta proposición es verdadera, pues el antecedente y el consecuente son verdaderos.

b) La proposición r $\rightarrow$ s: "si 8 es múltiplo de 3, entonces 9 es múltiplo de 5" es una condicional verdadera, ya que las proposiciones r: "el 8 es múltiplo de 3" y s: "el 9 es múltiplo de 5" son ambas falsas.

5ª) Bicondicional.-

Tabla V		
p	**q**	**p $\leftrightarrow$ q**
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

La bicondicional de las proposiciones p y q es la proposición p $\leftrightarrow$ q, que se lee "si y sólo si p, entonces q". Como observamos en la tabla, una proposición bicondicional sólo es verdadera cuando las dos proposiciones que la forman tienen el mismo valor de verdad.

<u>Ejemplo 2.4.5</u>.- La bicondicional de las proposiciones p: "hace frío" y q: "iremos a correr" es la proposición p $\leftrightarrow$ q: "si y sólo si hace frío, entonces iremos a correr". Son también evidentes los valores de verdad de esta última proposición.

6ª) Disyunción exclusiva.-

Tabla VI		
p	**q**	**p $\not\leftrightarrow$ q**
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	F

La disyunción exclusiva de las proposiciones p y q es la proposición p $\not\leftrightarrow$ q, que se lee "p o q, pero no ambas". La disyunción exclusiva de dos proposiciones es verdadera cuando sólo una de las dos proposiciones componentes es verdadera, resultando falsa en los otros casos. Si miramos las tablas de verdad V y VI, comprobamos de manera inmediata que la disyunción exclusiva es la negación de la bicondicional.

<u>Ejemplo 2.4.6</u>.- La disyunción exclusiva de las proposiciones p: "Luis estudia" y q: "Luis escucha música" es la proposición p $\not\leftrightarrow$ q: "Luis estudia o escucha música, pero no ambas", es decir, Luis nunca hace las dos cosas a la vez. En esta ocasión se considera que los enunciados de p y q son excluyentes.

A partir de las tablas de verdad de los esquemas proposicionales anteriores puede construirse la tabla de verdad de toda fórmula lógica, siendo éste el método más cómodo para conocer la verdad o falsedad de la proposición correspondiente a dicha fórmula. Sus valores de verdad dependerán de los valores de verdad de las proposiciones que figuren en ella.

Para hallar la tabla de verdad de una proposición cualquiera de un orden determinado, manifestada por su fórmula lógica, se van añadiendo columnas a los valores de verdad iniciales, empezando con las proposiciones afectadas por los nexos lógicos de menor extensión, continuándose el proceso hasta la obtención de la tabla de verdad de la proposición final. Comprobemos el procedimiento mediante unos ejemplos.

Ejemplo 2.4.7.- La tabla de verdad de la proposición $(\neg p) \wedge (p \rightarrow q)$ es:

Tabla VII				
p	**q**	**$\neg$p**	**p $\rightarrow$ q**	**($\neg$p) $\wedge$ (p $\rightarrow$ q)**
V	V	F	V	F
V	F	F	F	F
F	V	V	V	V
F	F	V	V	V

Ejemplo 2.4.8.- La tabla de verdad de la proposición $(p \vee q) \leftrightarrow (p \vee r)$ será:

Tabla VIII					
P	**q**	**r**	**p $\vee$ q**	**p $\vee$ r**	**(p $\vee$ q) $\leftrightarrow$ (p $\vee$ r)**
V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	V	V
V	F	V	V	V	V
F	V	V	V	V	V
V	F	F	V	V	V
F	V	F	V	F	F
F	F	V	F	V	F
F	F	F	F	F	V

NOTA 2.4.2.- Demostraremos en otro momento que el número de filas de una proposición de orden n, es decir, los casos posibles de los distintos sistemas de valores de verdad que pueden tomar las proposiciones que la integran, es igual al número de variaciones con repetición de dos elementos (V y F) tomados de n en n, cuyo valor es 2^n. Por eso son $4 = 2^2$ en el ejemplo 2.4.7. y $8 = 2^3$ en el 2.4.8.

2.5. PROPOSICIONES TAUTOLÓGICAS, CONTRADICTORIAS E INDETERMINADAS. IMPLICACIÓN Y EQUIVALENCIA

Aunque formalmente sean de diferente naturaleza, seguiremos identificando las proposiciones con sus fórmulas lógicas características, dada la comodidad que supone trabajar utilizando las tablas de verdad.

Definición 2.5.1.-

*Se dice que una proposición compuesta, representada por su fórmula lógica, es una **proposición tautológica** o una **tautología** cuando siempre es verdadera, independientemente de la verdad o falsedad de las proposiciones simples que la constituyen. Las tautologías son designadas habitualmente en los textos mediante la letra **T**.*

Ejemplo 2.5.1.- La proposición definida por $[p \rightarrow (\neg q)] \leftrightarrow [q \rightarrow (\neg p)]$ es una tautología, como se comprueba en la siguiente tabla:

Tabla IX						
p	**Q**	$\neg$**p**	$\neg$**q**	**p $\rightarrow$ ($\neg$q)**	**q $\rightarrow$ ($\neg$p)**	**[p $\rightarrow$ ($\neg$q)] $\leftrightarrow$ [q $\rightarrow$ ($\neg$p)]**
V	V	F	F	F	F	V
V	F	F	V	V	V	V
F	V	V	F	V	V	V
F	F	V	V	V	V	V

Definición 2.5.2.-

*Una proposición compuesta, simbolizada por su fórmula lógica, es una **proposición contradictoria** o una **contradicción** cuando siempre es falsa, con independencia de la verdad o falsedad de las proposiciones simples que la forman. Las contradicciones se denotan a través de la letra **C**.*

Ejemplo 2.5.2.- La proposición definida por $(\neg p) \wedge (p \wedge q)$ es una contradicción, según observamos en la próxima tabla:

Tabla X				
p	**q**	$\neg$**p**	**p $\wedge$ q**	**($\neg$p) $\wedge$ (p $\wedge$ q)**
V	V	F	V	F
V	F	F	F	F
F	V	V	F	F
F	F	V	F	F

Definición 2.5.3.-

*Se dice que una proposición compuesta, representada por su fórmula lógica, es una **proposición indeterminada** o una **indeterminación** cuando en su tabla de verdad aparecen valores verdaderos y falsos, dependiendo de los valores de verdad y falsedad de las proposiciones simples que la integran.*

Ejemplo 2.5.3.- La proposición definida por la fórmula $(\neg p) \wedge (p \rightarrow q)$ es una proposición indeterminada, como se desprende de la tabla VII.

Definición 2.5.4.-

*Se denomina **implicación** a cualquier proposición condicional que es una tautología. El símbolo utilizado para designar las implicaciones es **(⇒)**.*

Ejemplo 2.5.4.- La proposición simbolizada por $(p \wedge q) \rightarrow p$ es una implicación. En efecto:

Tabla XI			
p	**q**	**$p \wedge q$**	**$(p \wedge q) \rightarrow p$**
V	V	V	V
V	F	F	V
F	V	F	V
F	F	F	V

Al ser la condicional anterior una tautología, podemos escribir la expresión $(p \wedge q) \Rightarrow p$.

Definición 2.5.5.-

*Se llama **equivalencia** a toda proposición bicondicional que constituye una tautología. El símbolo empleado para denotar las equivalencias es **(⇔)**.*

Ejemplo 2.5.5.- La proposición manifestada por $[p \rightarrow (\neg q)] \leftrightarrow [q \rightarrow (\neg p)]$ es una equivalencia, según colegimos observando la tabla IX; luego puede escribirse $[p \rightarrow (\neg q)] \Leftrightarrow [q \rightarrow (\neg p)]$.

Definición 2.5.6.-

*Dadas dos proposiciones compuestas p y q, decimos que son **equivalentes** si sus fórmulas lógicas correspondientes poseen la misma tabla de verdad. Esto significa que, independientemente de los valores de verdad de las letras proposicionales, ambas fórmulas toman el mismo valor de verdad. Por extensión, la equivalencia de proposiciones se representa mediante* $\boldsymbol{p \Leftrightarrow q}$.

NOTA 2.5.1.- Algunos textos aplican el signo (=) para indicar la equivalencia de dos proposiciones. Las proposiciones p y q pueden ser, lógicamente, simples o compuestas, es decir, integradas estas últimas por otras proposiciones simples.

<u>Ejemplo 2.5.6</u>.- Vamos a comprobar que las proposiciones definidas con las fórmulas $\neg(p \wedge q)$ y $(\neg p) \vee (\neg q)$ son equivalentes. Para ello construimos sus tablas de verdad y verificamos la coincidencia. En efecto:

Tabla XII						
p	**q**	**$\neg$p**	**$\neg$q**	**p $\wedge$ q**	**$\neg$(p $\wedge$ q)**	**($\neg$p) $\vee$ ($\neg$q)**
V	V	F	F	V	F	F
V	F	F	V	F	V	V
F	V	V	F	F	V	V
F	F	V	V	F	V	V

Según esto, $\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow (\neg p) \vee (\neg q)$, lo que también puede expresarse como $p \wedge q \Leftrightarrow \neg[(\neg p) \vee (\neg q)]$ (*), pues resulta inmediato que $\neg(\neg p) \Leftrightarrow p$. Por tanto, a partir de la expresión (*) deducimos que una conjunción es equivalente a la negación de una disyunción.

NOTA 2.5.2.- Es evidente que un par de tautologías o un par de contradicciones son proposiciones equivalentes.

PROPIEDADES DE LAS TAUTOLOGÍAS Y DE LAS CONTRADICCIONES.-

Supongamos que p es una proposición cualquiera, T una tautología y C una contradicción. Con la disyunción inclusiva y la conjunción formamos la siguiente tabla de verdad:

Tabla XIII						
p	**T**	**C**	**p $\vee$ T**	**p $\wedge$ T**	**p $\vee$ C**	**p $\wedge$ C**
V	V	F	V	V	V	F
F	V	F	V	F	F	F

Observando la tabla anterior se infieren estas propiedades:

1ª) *La disyunción de una proposición y una tautología es una tautología.-*

$$p \vee T \Leftrightarrow T.$$

2ª) *La conjunción de una proposición y una tautología es equivalente a dicha proposición.-*

$$p \wedge T \Leftrightarrow p.$$

3ª) *La disyunción de una proposición y una contradicción equivale a la misma proposición.-*

$$p \vee C \Leftrightarrow p.$$

4ª) *La conjunción de una proposición y una contradicción es una contradicción.-*

$$p \wedge C \Leftrightarrow C.$$