2. Sean ahora en el conjunto de los números naturales, las proposiciones

$$p : \text{"5 es un número primo"}, \quad q : \text{"9 divide a 639"}.$$

En este caso se tienen los predicados "ser un número primo" y "dividir a ...".

Nótese que los predicados pueden referirse a uno o varios objetos del conjunto.

También de estos ejemplos y de la definición 3.2.1 se puede inferir que es imprescindible partir de un conjunto inicial de objetos o individuos y que los predicados no tienen valor veritativo.

3.2.1. Los cuantificadores lógicos

Como pudimos observar al final del epígrafe anterior, resulta de gran importancia la comprensión de los predicados que se refieren a todos los elementos o a al menos un elemento del conjunto de individuos. Este tipo de predicados se denota de manera abreviada a través de los cuantificadores lógicos que definimos a continuación:

- El símbolo $\forall$, se lee "para todo" y significa "para todo elemento del conjunto de individuos se cumple..."
- El símbolo $\exists$, se lee "existe" y significa "existe al menos un elemento del conjunto de individuos que cumple..."
- El símbolo $\exists!$, se lee "existe un único" y significa "existe un único elemento del conjunto de individuos que cumple...".

Ejemplos:

1. Sea

$$A = \{\text{Roberto, Juan, Sandra, Walkiria}\}$$

y sean las proposiciones:

$$\begin{aligned} p &: \text{"Roberto, Juan, Sandra y Walkiria practican ajedrez,} \\ q &: \text{"De Roberto, Juan, Sandra y Walkiria, al menos uno practica ajedrez",} \\ r &: \text{"De Roberto, Juan, Sandra y Valkiria, sólo uno practica ajedrez".} \end{aligned}$$

Utilizando los cuantificadores lógicos se escribe:

$$\begin{aligned} p &: \forall x \in A \text{ se cumple que } x \text{ practica ajedrez,} \\ q &: \exists x \in A \text{ tal que } x \text{ practica ajedrez,} \\ r &: \exists! x \in A \text{ tal que } x \text{ practica ajedrez.} \end{aligned}$$

2. Sean ahora en el conjunto $\mathbb{N}$ de los números naturales, las proposiciones

$$\begin{aligned} p &: \text{“todo número de la forma } 2k \text{ con } k \in \mathbb{N} \text{ es par”},\\ q &: \text{“existe al menos un número natural que es primo”},\\ r &: \text{“existe un único número natural que sólo tiene un divisor natural”}. \end{aligned}$$

Utilizando los cuantificadores lógicos se escribe:

$$\begin{aligned} p &: \forall x \in \mathbb{N} \text{ tal que } x = 2k \text{ con } k \in \mathbb{N} \text{ se cumple que } x \text{ es un número par},\\ q &: \exists x \in \mathbb{N} \text{ tal que } x \text{ es primo},\\ r &: \exists ! x \in \mathbb{N} \text{ tal que } x \text{ sólo tiene un divisor natural}. \end{aligned}$$

Agreguemos ahora a las ya conocidas leyes del cálculo proposicional algunas en las intervienen los cuantificadores lógicos y que serán también de gran utilidad en la deducción lógica de proposiciones. Para escribirlas de manera compacta denotemos los predicados con letras mayúsculas del alfabeto latino de la siguiente manera

- $P(x)$: denota la proposición formada por el predicado P y el individuo x,
- $Q(x, y)$: denota la proposición formada por el predicado Q y los individuos x, y.

De ese modo, la proposición

$$\exists x \in \mathbb{N} \text{ tal que } x \text{ es primo},$$

se escribe

$$\exists x \in \mathbb{N};\ P(x),$$

siendo P el predicado “ser un número primo” (note que usamos el símbolo de puntuación “;” para sustituir la frase “tal que”.

Existen muchas leyes del cálculo de predicados. Sin embargo, estudiaremos aquí solo algunas pocas que son muy utilizadas en la demostración de teoremas.

1. $$\boxed{\forall x \in A \text{ se cumplen } P(x) \text{ y } Q(x) \implies \begin{array}{l}[\forall x \in A \text{ se cumple } P(x)] \\ \text{y } [\forall x \in A \text{ se cumple } Q(x)].\end{array}}$$

   Es decir, si para todo objeto x del conjunto A se cumplen los predicados P y Q, entonces para todo objeto x del conjunto A se cumple P y para todo objeto x del conjunto A se cumple Q.

2. $$\boxed{\exists x \in A;\ P(x) \text{ y } Q(x) \Longrightarrow [\exists x \in A; P(x)] \text{ y } [\exists x \in A; Q(x)].}$$

Es decir, si existe un objeto x del conjunto A que cumple los predicados P y Q, entonces se puede asegurar que existe un objeto x del conjunto A que cumple P y existe un objeto x del conjunto A (el mismo) que cumple Q.

Nótese que el recíproco de esta expresión no es válido. Es decir, de la existencia de un objeto en A que cumpla P y uno que cumpla Q, no se puede deducir que exista un objeto que cumpla ambos predicados simultáneamente.

Ejemplo: Sea A el conjunto de los estudiantes Roberto, Juan, Sandra y Valkiria. De ellos se conoce que

Roberto practica ajedrez, futbol y baloncesto,

Juan practica natación,

Sandra practica gimnasia,

Valkiria no practica deportes.

Entonces se puede afirmar que

$$\exists x \in A;\ x \text{ practica natación y } \exists x \in A;\ \text{practica ajedrez,}$$

Sin embargo, ningún estudiante del conjunto A practica natación y ajedrez.

3. $$\boxed{\begin{array}{c}[\forall x \in A \text{ se cumple } P(x)] \vee [\forall x \in A \text{ se cumple } Q(x)] \\ \Longrightarrow \forall x \in A \text{ se cumple } [P(x) \vee Q(x)].\end{array}}$$

Es decir, si para todo objeto x del conjunto A se cumple el predicado P o para todo objeto x del conjunto A se cumple el predicado Q, entonces para todo objeto x del conjunto A se cumple P o Q.

4. $$\boxed{\exists x \in A;\ [P(x) \vee Q(x)] \Longrightarrow [\exists x \in A;\ P(x)] \vee [\exists x \in A;\ Q(x)].}$$

Es decir, si existe al menos un objeto x del conjunto A que cumple el predicado P o el predicado Q, entonces existe al menos un objeto x del conjunto A que cumple P o existe al menos un objeto x del conjunto A que cumple Q.

5. $$\boxed{\begin{array}{c}\forall x \in A \text{ se cumple que } P(x) \Longrightarrow Q(x)] \\ \Longrightarrow [(\forall x \in A \text{ se cumple } P(x)) \Longrightarrow (\forall x \in A \text{ se cumple } Q(x))].\end{array}}$$

Es decir, si para todo objeto x del conjunto A que cumple el predicado P se cumple el predicado Q, entonces si para todo objeto x del conjunto A se cumple P, ello implica que para todo x del conjunto A se cumple Q.

Las siguientes leyes son de gran utilidad en la decisión del valor veritativo de proposiciones con cuantificadores y expresan la forma de negar estos últimos.

6. $$\boxed{\neg(\exists x \in A;\ P(x)) \Longrightarrow \forall x \in A \text{ se cumple } \neg P(x).}$$

   Es decir, no existe ningún objeto x del conjunto A que cumpla el predicado P, si y sólo si para todo objeto x del conjunto A no se cumple P.

7. $$\boxed{\neg(\forall x \in A \text{ se cumple } P(x)) \Longleftrightarrow \exists x \in A;\ \neg P(x).}$$

   Es decir, no para todo objeto x del conjunto A se cumple el predicado P, si y sólo si si existe al menos un objeto x del conjunto A que no cumple P.

Ejemplos:

1. Sea $\mathbb{R}$ el conjunto de los números reales. Entonces la proposición "$\forall x \in \mathbb{R}$ se cumple que $x \in \mathbb{Q}$" es falsa, pues por ejemplo, $\pi \notin \mathbb{Q}$, es decir, se cumple $\exists x \in \mathbb{R};\ x \notin \mathbb{Q}$.

2. La proposición "Existe al menos un número natural n que es divisible por 4 y no es divisible por 2" (que por supuesto, es falsa) quedaría negada en la forma "Para todo número natural n se cumple que si n es divisible por 4, entonces n es divisible por 2".

3.3. Algunas formas de la demostración de teoremas

En los epígrafes anteriores hemos hablado de los teoremas en la Matemática en relación con las leyes del cálculo proposicional, de predicados y la deducción lógica. Precisamente nos dedicaremos aquí a estudiar a través de ejemplos algunas formas de la demostración de teoremas que se derivan de dichas leyes.

La demostración directa

Este método de demostración consiste en deducir directamente la tesis del teorema a partir de las hipótesis a través del uso de las leyes de la deducción lógica. Por ejemplo, demostremos directamente el siguiente teorema: